МАТЕМАТИКА 8

УЧЕБНИК ЗА ОСМО ОДДЕЛЕНИЕ ВО ОСНОВНО ОБРАЗОВАНИЕ

Д-р Костадин Тренчевски
Д-р Билјана Крстеска
Весна Бојаџиева

lamina

МАТЕМАТИКА 8 учебник за осмо одделение во основно образование
Авторски права © 2026, Арс Ламина – публикации

Издава
Арс Ламина-публикации, Скопје 2026

Главен уредник
Бранка Бугариска

Уредник
Билјана Стојоска Златков

Автори
Д-р Костадин Тренчевски
Д-р Билјана Крстеска
Весна Бојациева

Јазична редакција
Валентина Бачваровска

Рецензенти
проф. д-р Љупчо Настовски
проф. д-р Крутан Расими
Јованка Вангелова

Дизајн
Pointer Creative Agency

Графичко и техничко уредување
Арс Ламина-публикации

Печати
Бранко Гапо – графичко производство, Скопје 2026

Тираж
14500

Сите права се задржани. Ниту еден дел од оваа книга не смее да биде препечатуван или пренесуван во каква било форма или со какви било средства, електронски или механички, вклучувајќи и фотокопирање, документирање или да биде зачуван во систем за повторно пронаоѓање без писмена согласност од издавачот.

Овој учебник е одобрен за употреба во деветгодишно основно образование, со Одлука за одобрување и употреба на учебник по наставниот предмет Математика за VIII одделение во основно образование број 26-708/1 од 5.6.2026, Министерство за образование и наука на Република Северна Македонија

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.016:51(075.2)=163.3

ТРЕНЧЕВСКИ, Костадин
Математика 8 : учебник за осмо одделение во основно образование / Костадин Тренчевски, Билјана Крстеска, Весна Бојациева. - Скопје : Арс Ламина – публикации, 2026. - 410 стр. : илустр. ; 27 см

Библиографија: стр. 410

ISBN 978-608-280-320-3

1. Крстеска, Билјана [автор] 2. Бојациева, Весна [автор]

COBISS.MK-ID 69110277

КАКО ДА ГО КОРИСТИШ ОВОЈ УЧЕБНИК?

Учебникот е поделен во **пет теми** и секоја тема има различна боја:

ТЕМА 1: Броеви и операции со броеви

ТЕМА 2: Геометрија

ТЕМА 3: Алгебра

ТЕМА 4: Мерење

ТЕМА 5: Работа со податоци

Содржините во секоја тема се обработени на лесен и едноставен начин и за таа цел се користат различни полиња.

Активност

Секоја лекција започнува со воведна активност во која има прашања или задачи преку кои ќе се потсетиш на наученото од претходните години.

Пример 1

Решените примери ќе ти покажат како да ги користиш правилата што се учат во лекцијата.

Задача 1

Овие задачи се слични со решените примери и нив треба да ги решаваш самостојно.

Во ова поле се дефинирани поимите што се учат во лекцијата и е важно да ги научиш за да можеш да ги разбереш барањата во задачите.

Во ова поле се дадените својства или правила што се важни во лекцијата кои треба да ги научиш за да можеш да ги решаваш задачите.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

На крајот на секоја лекција има задачи со кои ќе повториш она што се учело во таа лекција

Истражување

Во ова поле се дадени задачи за проширување и продлабочување на знаењата.

На крајот на секоја тема има задачи за повторување и утврдување на материјалот од темата. Овие задачи ќе ти помогнат да ги повториш и да ги продлабочиш знаењата од секоја лекција од темата.

Содржина

ТЕМА 1: БРОЕВИ И ОПЕРАЦИИ СО БРОЕВИ

1. Поим за релација 8
2. Својства на релациите 13
3. Релација за еквивалентност и релација за подредување 18
4. Релации во практиката 21
5. Рационални броеви 25
6. Бесконечни периодични децимални броеви 30
7. Еднаквост на дропки, децимални броеви и проценти 33
8. Пресметување дропки и проценти од количини 37
9. Примена на проценти 40
10. Размер 42
11. Пропорционални величини 47
12. Собирање и одземање рационални броеви 54
13. Множење и делење рационални броеви 59
14. Својства на операциите со рационални броеви 64
15. Бројни изрази со рационални броеви 68
16. Двојни дропки 70
17. Степени со основа цел број и степенов показател природен број 74
18. Квадратен корен и кубен корен 78
19. Запишување на броевите во облик $a \cdot 10^k$, за $a, k \in \mathbb{N}$ 84
20. Множење и делење степени со еднакви основи 90

ТЕМА 2: ГЕОМЕТРИЈА

1. Агли со заемно паралелни краци и агли со заемно нормални краци 100
2. Кружница, круг и нивни делови 105
3. Периферен агол 111
4. Конструкции на некои специјални видови триаголници 117
5. Поим за складност. Складни триаголници 122
6. Признаци за складност на триаголници 127
7. Питагорова теорема 138

8. Примена на питагоровата теорема во триаголници 145
9. Четириаголник. паралелограм. правоаголник, ромб и квадрат 149
10. Трапез и делтоид 156
11. Примена на Питагоровата теорема во четириаголници 163
12. Конструктивни задачи 169
13. Полиедар, топка и сфера 175
14. Правилни полиедри 180
15. Врска помеѓу бројот на темиња, рабови и ѕидови кај полиедрите 183
16. Цртање на сложени 3д-форми 186
17. Комбинации од транслации, ротации и осни симетрии 189
18. Идентификување комбинации од осна симетрија, ротација и транслација 194

ТЕМА 3: АЛГЕБРА

1. Моном 202
2. Собирање и одземање мономи 206
3. Полином. Степен на полином 210
4. Собирање и одземање полиноми 215
5. Множење полиноми 219
6. Делење полином со моном 222
7. Упростување цели рационални изрази 225
8. Замена на променливи со цели броеви во цели рационални изрази и во формули 228
9. Составување и решавање линеарни равенки 233
10. Примена на линеарни равенки со една непозната 237
11. Низи од броеви и форми 242
12. Определување општ член на низа 245
13. Функција 251
14. Линеарна функција. График на линеарна функција 258
15. Тек на линеарна функција 264
16. Запишување линеарна функција зададена со график 273

ТЕМА 4: МЕРЕЊЕ

1. Мерни единици за време 286
2. Графици во контекст на време 289
3. Должина на кружница 297
4. Должина на кружен лак 301
5. Периметар на сложени 2д форми 306
6. Плоштина на паралелограм 311
7. Плоштина на триаголник 315
8. Плоштина на трапез 320
9. Плоштина на ромб, делтоид и квадрат 324
10. Плоштина на круг 328
11. Плоштина на кружен исечок, кружен отсечок и кружен прстен 331
12. Плоштина на призма и пирамида 336
13. Волумен на призма и пирамида 342

ТЕМА 5: РАБОТА СО ПОДАТОЦИ

1. Популација и примерок 353
2. Дискретни податоци. Табела на фреквенции 359
3. Планирање на истражување и собирање податоци 365
4. Дијаграми 372
5. Стебло-лист дијаграм 378
6. Статистички пресметувања за групирани податоци 383
7. Елементарен настан. Спротивен настан. Веројатност 388
8. Настани кои заемно се исклучуваат. Зависни и независни настани 395

Тема 1:

БРОЕВИ И ОПЕРАЦИИ СО БРОЕВИ

Резултати од учење:

При изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш да:

- решаваш проблеми од секојдневен контекст со користење на релации меѓу множества.
- применуваш еднаквост на дропки, децимални броеви и проценти при споредување различни количини.
- решаваш проблеми од секојдневен контекст со размер и пропорционалност.
- користиш операции со рационални броеви во секојдневен контекст.
- користиш степен со основа цел број и степенов показател природен број, квадратен и кубен корен од природен број во секојдневен контекст.

1. ПОИМ ЗА РЕЛАЦИЈА

Активност

Дадени се множествата
$A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{a, b\}$.

а) Именувај го, а потоа претстави го на табеларен и описен начин множеството $A \times B$ од сите подредени парови на множествата A и B.

б) Запиши три произволни подмножества M, N и P од Декартовиот производ $A \times B$.

Ќе се запознаеме со еден многу важен поим во математиката, со поимот релација. Овој збор во секојдневниот живот има широко значење, но во математиката има многу прецизна смисла и значење.

Пример 1

На цртеж 1 со Венов дијаграм се претставени множеството A од четири ученици и множеството B од пет града:

$A = \{$Влатко, Мајлинда, Билјана, Борче$\}$, и

$B = \{$Битола, Штип, Скопје, Дебар, Охрид$\}$.

Со стрелките е прикажано за секој ученик од множеството A во кои градови од множеството B престојувал. Што може да се заклучи од дијаграмот?

Од Влатко поаѓаат две стрелки, едната е насочена кон Битола, а другата кон Скопје. Тие означуваат дека Влатко, престојувал во Битола и Скопје. Велиме дека Влатко **е во релација** со Битола, а исто така, Влатко **е во релација** со Скопје.

Од Мајлинда не поаѓа ниту една стрелка. Тоа значи, дека Мајлинда не престојувала во ниту еден од наведените градови. Велиме дека Мајлинда **не е во релација** со ниту еден од наведените градови.

До градот Дебар не доаѓа ниту една стрелка. Тоа значи дека во овој град не престојувал никој од учениците. Велиме дека ниту еден од учениците **не е во релација** со градот Дебар.

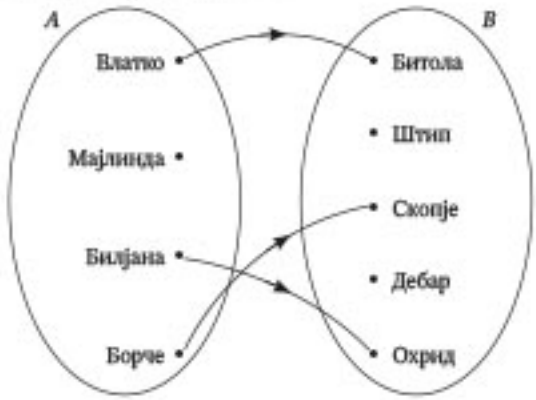


црт. 1

Во овој случај велиме дека со помош на стрелки е зададена **релација** според правилото на придружување „....го посетил градот...“ меѓу елементите на множествата A и B. На цртеж 1, со Венови дијаграми се претставени елементите на множествата A и B, а со стрелки се поврзани елементите што се во релација од двете множества. Ваков начин на претставување велиме дека е претставување со **граф** на зададената релација. Секоја стрелка од графот на цртеж 1 заменува еден подреден пар од објекти, од кои првиот е елемент на A и стои на почетокот на стрелката, а вториот е елемент на B и стои на крајот на стрелката. Имаме колку стрелки – толку подредени парови.
Според тоа, во пример 1 ги добиваме подредените парови:
(Влатко, Битола), (Влатко, Скопје), (Билјана, Битола), (Билјана, Штип), (Билјана, Скопје), (Билјана, Охрид), (Борче, Скопје), (Борче, Охрид).
Сите подредени парови во релација од A во B образуваат точно определено множество, кое е подмножество од Декартовиот производ на множествата A и B.

Задача 1

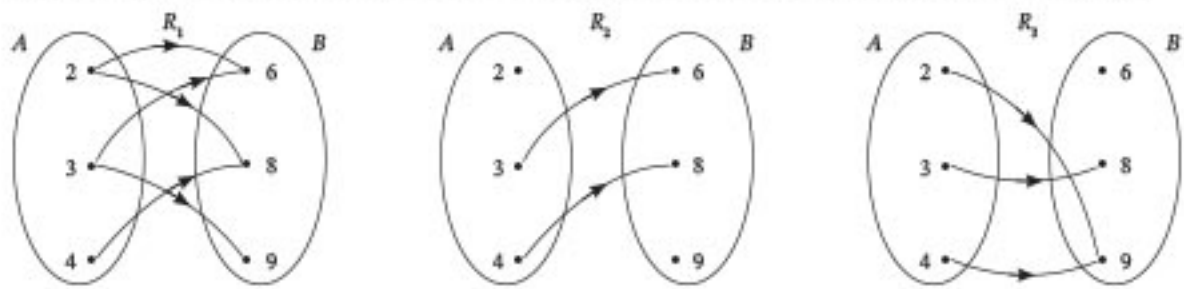
На цртеж 2 е прикажан графот на релацијата определена според правилото на придружување „....е роден/родена во...“ меѓу множествата A и B.
Дали може ученик од множеството A да биде во релација со повеќе од еден град од множеството B? Образложи го твојот одговор.



црт. 2

Задача 2

На цртеж 3 со помош на граф се зададени три релации, R_1, R_2 и R_3, меѓу множествата A и B. Правилото на придружување на релацијата R_1 е определено со: „....се содржи во...“.
Обиди се да го откриеш правилото на придружување на секоја од релациите R_2 и R_3.



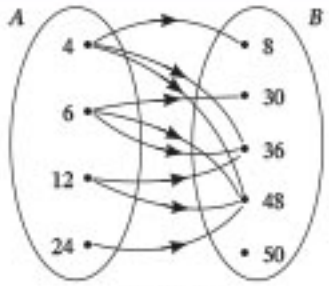
црт. 3

Нека A и B се две непразни множества. Секое подмножество R од Декартовиот производ $A \times B$ се вика **релација** меѓу множествата A и B.

Ако $(x, y) \in R$ велиме x **е во релација со** y и пишуваме $x\,R\,y$.

Пример 2

Дадени се множествата $A = \{4, 6, 12, 24\}$ и $B = \{8, 30, 36, 48, 50\}$. На цртеж 4 е прикажан графот на релацијата R: „...е делител на...“ меѓу множествата A и B.
Претстави ја релацијата R:
а) на описен начин, б) на табеларен начин.



црт. 4

Релацијата R, сметана за подмножество од Декартовиот производ $A \times B$, можеме да ја претставиме:
а) на **описен начин**, истакнувајќи го односот меѓу елементите кои се во релација
$R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ и } x \mid y\}$;
б) на **табеларен начин**, со запишување на сите подредени парови кои ја сочинуваат
$R = \{(4, 8), (4, 36), (4, 48), (6, 30), (6, 36), (6, 48), (12, 36), (12, 48), (24, 48)\}$.

Задача 3

Дадени се множествата $A = \{4, 6, 17, 18\}$ и $B = \{6, 19, 20, 24\}$. Претстави ја релацијата R: „...е за 2 помал од...“ од множеството A во множеството B.
а) со граф, б) на описен начин, в) на табеларен начин.

Релациите можат да бидат зададени и меѓу елементите на едно исто множество.

Пример 3

Дадено е множеството $M = \{\text{Битола, Прилеп, Штип, Охрид, Дебар, Радовиш, Пехчево}\}$. Нацртај го графот на релацијата во множеството M: „Последната буква на името на градот ... е прва буква на името на градот ...“.

На цртеж 5 е претставен графот на дадената релација.

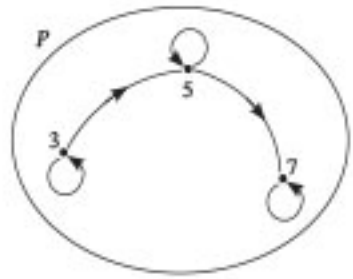


црт. 5

Задача 4

Претстави ја релацијата R меѓу елементите на множеството $P = \{3, 5, 7\}$ прикажана со графот на цртеж 6:

а) на описен начин, б) на табеларен начин.



црт. 6

Задача 5

Во множеството $Q = \{4, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$ зададена е релацијата $R = \{(x, y) \mid x, y \in Q \text{ и } y = x + 2\}$. Претстави ја релацијата R:

а) со граф, б) на табеларен начин.

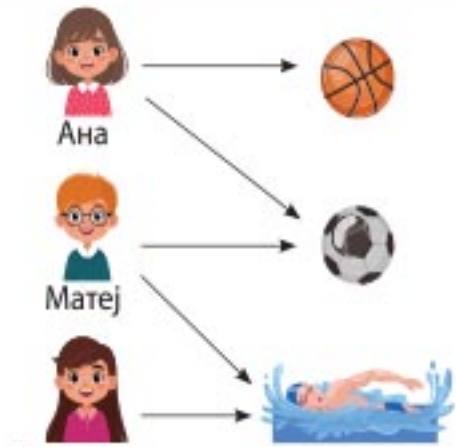
Задача 6

На слика 1 се прикажани омилените спортови на Ана, Матеј и Лиридона.
Тие избираат помеѓу спортовите фудбал, кошарка и пливање.

а) Претстави ја на табеларен начин релацијата R: „На ... омилен спорт е ...“.

б) Дали две деца имаат ист омилен спорт?

в) Дали некое дете има повеќе од еден омилен спорт?



слика 1

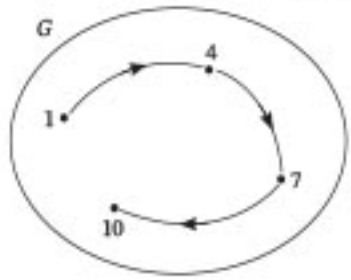
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Од понудените вкусови на сладолед: ванила, чоколадо и јагода, Ива го избра вкусот на ванила, а Борис го избра вкусот на чоколадо.
   а) Претстави ја со граф релацијата R: „...го избра вкусот на...“.
   б) Дали двајца ученици избраа ист вкус на сладолед?
   в) Дали некој ученик избра повеќе од еден вкус на сладолед?
   г) Дали постои вкус на сладолед што не е избран?

2. Наставничката ги прашала учениците Петар, Емина и Марија кои спортови ги тренираат. Таа добила одговор дека:
   Петар тренира фудбал, Емина тренира гимнастика,
   Марија тренира пливање, и Петар тренира кошарка.
   а) Претстави ја со граф релацијата R: „...тренира...“.
   б) Дали некој ученик тренира повеќе од еден спорт?
   в) Дали има ученик кој не тренира ниту еден спорт?

3. Претстави ја релацијата R меѓу елементите на множествата C и D со граф, ако:
   а) $C = \{6, 9, 18, 29, 36\}$, $D = \{12, 15, 24, 27, 35, 42\}$ и R: „....е поголем за 6 од...“,
   б) $C = \{30, 24, 27, 18, 9, 12\}$, $D = \{8, 10, 3, 6, 9, 5\}$ и R: „....е 3 пати помал од...“.

4. Претстави ја релацијата R меѓу елементите на множеството $G = \{1, 4, 7, 10\}$ прикажана со графот на цртеж 7: а) на описен начин, б) на табеларен начин.



црт. 7

5. Во множеството $P = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ е зададена релацијата $R = \{(x, y) \mid x, y \in P \text{ и } y = 2x\}$. Претстави ја релацијата R: а) со граф, б) на табеларен начин.

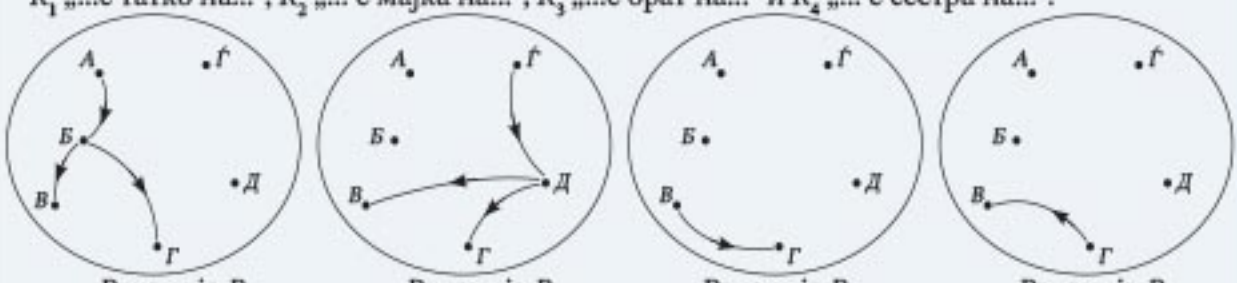
6. Ана во секој работен ден од минатата седмица вежбала за да се подготви за спортски натпревар. Таа бележела колку минути вежба и колку калории троши секој ден. Податоците од нејзиното неделно вежбање се прикажани во табелата:

ден во седмицата	време на вежбање (min)	калории (kcal)
понеделник	20	100
вторник	30	150
среда	25	125
четврток	40	200
петок	35	175

Објасни ја релацијата меѓу времето на вежбање и потрошените калории.
Претстави ја определената релација: а) со граф, б) на табеларен начин.

Истражување

Во множеството $C = \{А, Б, В, Г, Д, Ѓ\}$ од членови на едно семејство се зададени релациите:
R_1 „....е татко на...“, R_2 „.... е мајка на...“, R_3 „....е брат на...“ и R_4 „.... е сестра на...“.



Релација R_1 Релација R_2 Релација R_3 Релација R_4

црт. 8

Користејќи ги нивните графови, прикажани на цртеж 8, откриј го составот и роднинските врски меѓу членовите на семејството.

2. СВОЈСТВА НА РЕЛАЦИИТЕ

Преку примери од математика, но и од секојдневието, ќе откриеш зошто се важни својствата на релациите и како ќе ти помагаат да ги опишеш односите меѓу елементите во едно множество на прецизен и логичен начин.

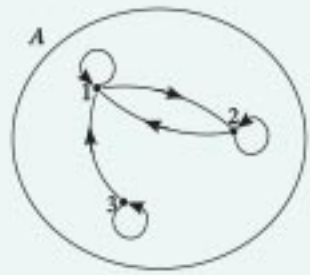
За релацијата R во множеството A велиме дека е **рефлексивна** ако и само ако $(x, x) \in R$, за секое $x \in A$, односно

$x \, R \, x$, за секое $x \in A$.

Пример 1

Во множеството $A = \{1, 2, 3\}$ е зададена релацијата $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 1)\}$.
Провери дали релацијата R е рефлексивна.

Релацијата е рефлексивна, бидејќи подредените парови $(1, 1)$, $(2, 2)$ и $(3, 3)$ припаѓаат во R, односно $1 \, R \, 1$, $2 \, R \, 2$ и $3 \, R \, 3$ што значи исполнет е условот $x \, R \, x$, за секое $x \in A$.
До истиот заклучок може да дојдеме ако го разгледаме графот на релацијата прикажан на цртеж 1. Од секој елемент x поаѓа стрелка, која завршува до самиот тој елемент, наречена **алка**.



црт. 1

За релацијата R во множеството A велиме дека е **симетрична** ако и само ако $(x, y) \in R$ повлекува $(y, x) \in R$, за секои $x, y \in A$, односно

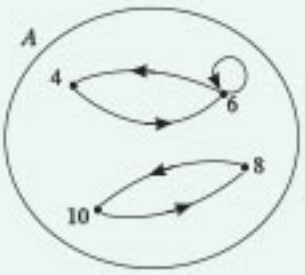
$x \, R \, y$, повлекува $y \, R \, x$, за секои $x, y \in A$.

Пример 2

Во множеството $A = \{4, 6, 8, 10\}$ е дадена релацијата $R = \{(4, 6), (6, 6), (6, 4), (8, 10), (10, 8)\}$.
Провери дали релацијата R е симетрична.

За парот $(6, 6)$ од R и парот $(6, 6)$ припаѓа во R,
за парот $(4, 6)$ од R и парот $(6, 4)$ припаѓа во R,
за парот $(6, 4)$ од R и парот $(4, 6)$ припаѓа во R,
за парот $(8, 10)$ од R и парот $(10, 8)$ припаѓа во R,
за парот $(10, 8)$ и парот $(8,10)$ припаѓа во R,
што значи исполнет е условот $x \, R \, y$, повлекува $y \, R \, x$, за секои $x, y \in A$.

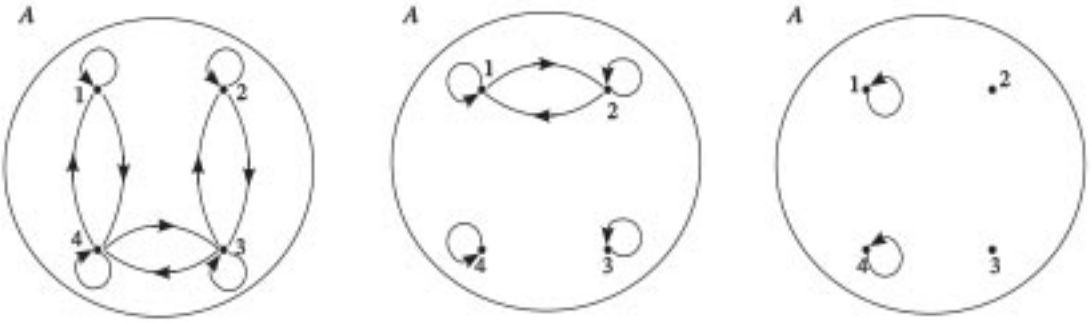
Според тоа, релацијата R е симетрична.
До истиот заклучок можеме да дојдеме ако го разгледаме графот на релацијата R прикажан на цртеж 2.
Забележуваме дека ако од елементот x има стрелка до елементот y, тогаш и од елементот y има стрелка до елементот x, односно графот на релацијата R има само **двојни врски**.
Притоа, алката ја сметаме за двојна врска.



црт. 2

Задача 1

Релациите R_1, R_2 и R_3 во множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$ се претставени со своите графови на цртеж 3. Кои од нив се рефлексивни, а кои се симетрични? Образложи го одговорот.



Релација R_1 Релација R_2 Релација R_3
црт. 3

Задача 2

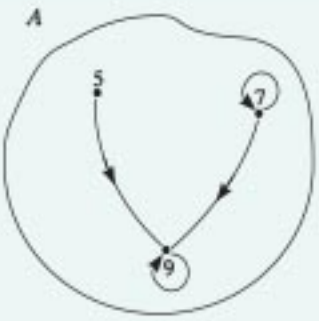
Марко, Соња и Ерол живеат во иста зграда. Марко живее на четвртиот кат, Соња живее на петтиот кат, а Ерол живее на четвртиот кат. Меѓу учениците, според катот на кој живеат, е определена релацијата R: „...живее на ист кат со...“
а) Претстави ја релацијата на табеларен начин и со граф.
б) Дали релацијата R е рефлексивна и симетрична? Образложи го твојот одговор.

За релацијата R во множеството A велиме дека е **антисиметрична** ако и само ако $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$, повлекува $x = y$, за секои $x, y \in A$, односно
$x\,R\,y$ и $y\,R\,x$ повлекува $x = y$, за секои $x, y \in A$.

Пример 3

Во множеството $A = \{5, 7, 9\}$ дадена е релацијата $R = \{(5, 9), (7, 7), (7, 9), (9, 9)\}$.
Провери дали релацијата R е антисиметрична.

За парот (5, 9) од R, парот (9, 5) не припаѓа во R, и за парот (7, 9) од R, парот (9, 7) не припаѓа во R Според тоа, ако $x\,R\,y$ и $y\,R\,x$ тогаш $x = y$, за секои $x, y \in A$, тоа значи дека релацијата е антисиметрична.

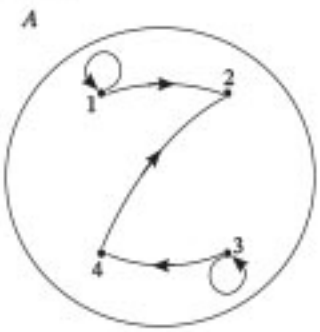


црт. 4

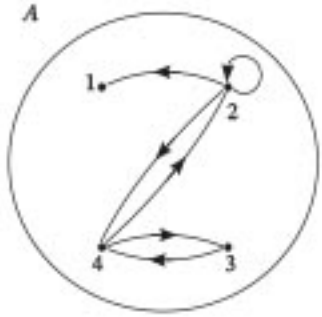
До истиот заклучок можеме да дојдеме ако го разгледаме графот на релацијата R прикажан на цртеж 4. Забележуваме дека ако од елементот x има стрелка до елементот y, $x \neq y$, тогаш нема стрелка од елементот y до елементот x, односно графот на релацијата R нема ниту една двојна врска, освен можеби алки.

Задача 3

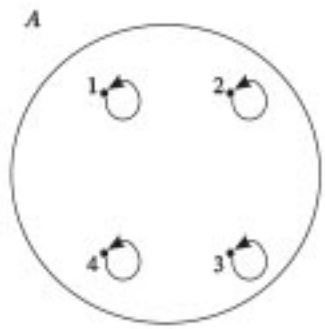
Релациите R_1, R_2 и R_3 во множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$ се претставени со своите графови на цртеж 5. Кои од релациите се рефлексивни, а кои се антисиметрични? Образложи го одговорот.



Релација R_1



Релација R_2



Релација R_3

црт. 5

Задача 4

Филип, Иван и Лидија одат во исто училиште. Познато е дека Филип има 14 години, Иван има 12 години, а Лидија има 7 години. Меѓу учениците, според нивната возраст, е определена релацијата R: „...е постар од...“.

а) Претстави ја релацијата на табеларен начин и со граф.

б) Дали релацијата R е антисиметрична? Образложи го твојот одговор.

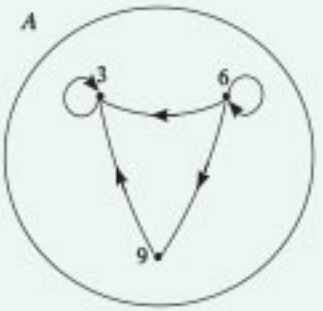
За релацијата R во множеството A велиме дека е **транзитивна** ако и само ако $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ повлекува $(x, z) \in R$, за секои $x, y, z \in A$, односно

$x\,R\,y$ и $y\,R\,z$ повлекува $x\,R\,z$, за секои $x, y, z \in A$.

Пример 4

Во множеството $A = \{3, 6, 9\}$ дадена е релацијата $R = \{(3, 3), (6, 6), (6, 3), (6, 9), (9, 3)\}$. Провери дали релацијата е транзитивна.

Да ги провериме сите можни случаи:
за паровите (3, 3) и (3, 3) од R и парот (3, 3) припаѓа во R;
за паровите (6, 6) и (6, 6) од R и парот (6, 6) припаѓа во R;
за паровите (6, 6) и (6, 3) од R и парот (6, 3) припаѓа во R;
за паровите (6, 6) и (6, 9) од R и парот (6, 9) припаѓа во R;
за паровите (6, 3) и (3, 3) од R и парот (6, 3) припаѓа во R;
за паровите (6, 9) и (9, 3) од R и парот (6, 3) припаѓа во R.
за паровите (9, 3) и (3, 3) од R и парот (9, 3) припаѓа во R;
Согледуваме дека е исполнет условот $x\,R\,y$ и $y\,R\,z$ тогаш $x\,R\,z$, за секои $x, y, z \in A$.



црт. 6

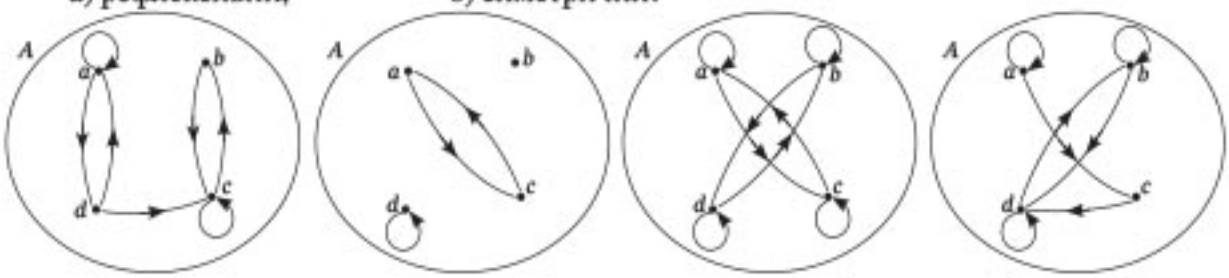
До истиот заклучок можеме да дојдеме ако го разгледаме графот на релацијата R прикажан на цртеж 6. Забележуваме дека ако од елементот x има стрелка до елементот y, и од елементот y има стрелка до елементот z, тогаш има стрелка од елементот x до елементот z (во проверката ги вклучуваме и алките).

Задача 5

Во училишниот двор учениците Ана, Бесид, Вера и Горан се постројуваат во редица за спортска вежба. Наставникот сака да ги построи учениците по висина. Ана е висока 150 cm, Бесид е висок 155 cm, Вера е висока 150 cm и Горан е висок 160 cm.
Наставникот ја користи релацијата R: „...е повисок или е со иста висина како...“
а) Претстави ја релацијата на табеларен начин и со граф.
б) Утврди дали релацијата е рефлексивна, симетрична, антисиметрична и транзитивна.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

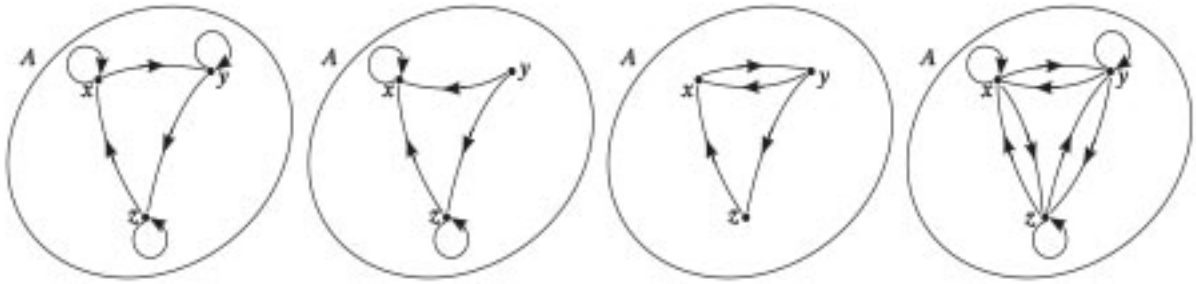
1. Кои од релациите R_1, R_2, R_3 и R_4 во множеството $A = \{a, b, c, d\}$ на цртеж 7 се:
   а) рефлексивни, б) симетрични?



Релација R_1 Релација R_2 Релација R_3 Релација R_4

црт. 7

2. Кои од релациите R_1, R_2, R_3 и R_4 во множеството $S = \{x, y, z\}$ на цртеж 8 се:
   а) антисиметрични, б) транзитивни?



Релација R_1 Релација R_2 Релација R_3 Релација R_4

црт. 8

3. Во множеството $X = \{a, b, c, d\}$ зададени се релациите R_1, R_2, R_3 и R_4 така што:
$R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (d, c)\}$, $R_2 = \{(a, b), (a, d), (b, c), (d, c)\}$,
$R_3 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (d, b)\}$ и $R_4 = \{(a, b), (a, c), (c, b), (d, d)\}$.
Кои од зададените релации се транзитивни?

4. Во множеството $T = \{1, 2, 3, 5\}$ се зададени релациите: R_1: „... е помал од ...“,
R_2: „...не е помал од...“, $R_3 = \{(x, y) \mid x, y \in T, x + y$ е парен број$\}$ и
$R_4 = \{(3, 2), (1, 1), (2, 3), (5, 5), (1, 5), (5, 1)\}$.
Претстави ја секоја релација со граф и испитај ги својствата: рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност.

5. Дејан има 19 години, Симона има 16 години, а Горан има 18 години.
Во множеството $A = \{$Дејан, Симона, Горан$\}$ зададена е релацијата R:„...е помлад од...“.
а) Претстави ја релацијата R со граф.
б) Дали релацијата е транзитивна? Објасни го твојот одговор.

6. Учениците Елена, Игор, Марко и Илир извеле по една музичка композиција. Професорот сака да воспостави релација меѓу учениците според темпото (удари во минута) на изведената композиција. Темпото на композицијата на Елена било 60 удари во минута, на Игор било 100 удари во минута, на Марко било 60 удари во минута, а на Илир 120 удари во минута.
а) Претстави ја со граф релацијата R: „...изведе композиција со исто или побавно темпо од темпото на композицијата на...“.
б) Испитај ги својствата на релацијата: рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност.

7. Во множеството $D = \{$Германија, Франција, Шпанија, Италија, Белгија, Швајцарија$\}$ е определена релација R: „...има заедничка копнена граница со...“.
а) Претстави ја релацијата R со граф.
б) Дали релацијата е рефлексивна, симетрична или транзитивна? Објасни го твојот одговор.
Упатство: Користи географска карта или интернет за да утврдиш кои држави имаат заеднички копнени граници.

Истражување

Запиши го на табеларен начин множеството членови на твоето семејство. Потоа, запиши ги на табеларен начин релациите:
R_1: „...е повозрасен од...“ и R_2: „...не е помлад од...“.
а) Испитај ги својствата на релациите R_1 и R_2.
б) Откриј по кое својство се разликуваат релациите R_1 и R_2?

3. РЕЛАЦИЈА ЗА ЕКВИВАЛЕНТНОСТ И РЕЛАЦИЈА ЗА ПОДРЕДУВАЊЕ

Активност

Во множеството $L = \{35, 25, 38, 75, 573, 735, 921\}$ зададена е релацијата
R: „...има иста цифра на десетки со...“.
а) Претстави ја релацијата со граф. б) Испитај ги својствата на релацијата.

За релацијата R во множеството A велиме дека е **релација за еквивалентност** ако е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Релацијата за еквивалентност ги става во врска елементите што се сметаат за еднакви според некое својство.

Пример 1

Наставничката по мајчин јазик им дава на учениците задача да групираат различни зборови со исто значење, односно синоними. На пример, зборовите „среќен“, „радосен“, и „весел“ се синоними. Дали на овој начин е определена релација за еквивалентност во множеството зборови од мајчиниот јазик?

Да, затоа што оваа релација е:
- рефлексивна, бидејќи секој збор е синоним на самиот себе;
- симетрична, бидејќи, на пример, ако „среќен“ е синоним на „радосен“, тогаш и „радосен“ е синоним на „среќен“;

- транзитивна, бидејќи, на пример, ако „среќен“ е синоним на „радосен“, и „радосен“ е синоним на „весел“, тогаш и „среќен“ е синоним на „радосен“.

Значи, синонимите според своето значење определуваат релација за еквивалентност.

Задача 1

Во множеството S од сите автомобили на еден паркинг ја разгледуваме релацијата R: „...има иста боја со...“. Провери дали R е релација за еквивалентност во множеството S.

Активност

Во множеството $L = \{1, 2, 3, 5\}$ зададена е релацијата R: „...не е помал од...“.
а) Претстави ја релацијата со граф. б) Испитај ги својствата на релацијата.

За релацијата R во множеството A велиме дека е **релација за подредување**, ако е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

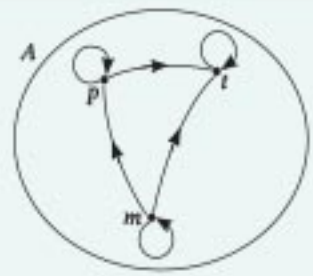
Релацијата за подредување воспоставува редослед меѓу елементите на множеството според одредено својство (големина, висина, бројност итн.).

Пример 2

Во множеството $A = \{p, m, t\}$ е зададена релацијата R: „...не е во англиската азбука после...“.
а) Претстави ја релацијата R со граф.
б) Провери дали R е релација за еквиваленција или релација за подредување.

а) Графот на релацијата R е прикажан на цртеж 1.
б) Релацијата R ги има следните својства.

- рефлексивна: p не е во англиската азбука после p, што значи $(p, p) \in R$;
  m не е во англиската азбука после m, што значи $(m, m) \in R$; и
  t не е во англиската азбука после t, што значи $(t, t) \in R$.



црт. 1

- антисиметрична: m не е во англиската азбука по p, па не е точно дека p не е во англиската азбука по m, што значи $(m, p) \in R$, но $(p, m) \notin R$;

p не е во англиската азбука по t, па не е точно дека t не е во англиската азбука по p, што значи $(p, t) \in R$, но $(t, p) \notin R$; и
m не е во англиската азбука по t, па не е точно дека t не е во англиската азбука по m, што значи $(m, t) \in R$, но $(t, m) \notin R$.

- транзитивна: m не е во англиската азбука по p, и p не е во англиската азбука по t, но и m не е во англиската азбука по t, што значи $(m, p) \in R$ и $(p, t) \in R$ повлекува $(m, t) \in R$.

Пример 3

На систематски преглед е утврдено дека Петар има висина 160 cm, Нина има висина 170 cm и Изет има висина 180 cm. Во множеството на ученици е зададена релацијата R: „...има иста или помала висина од...“. Дали на овој начин е определена релација за подредување во множеството ученици?

Учениците Петар, Нина и Изет имаат различни висини.
Релацијата R е рефлексивна, бидејќи секој ученик има иста висина со својата висина.
Релацијата R е антисиметрична, бидејќи: Петар има иста или помала висина од Нина, но Нина нема иста или помала висина од Петар; Петар има иста или помала висина од Изет, но Изет нема иста или помала висина од Петар; Нина има иста или помала висина од Изет, но Изет нема иста или помала висина од Нина.
Релацијата R е транзитивна, бидејќи ако еден ученик има иста или помала висина од друг ученик, а другиот има иста или помала висина од трет ученик, тогаш и првиот ученик има иста или помала висина од третиот ученик.
Значи, R е релација за подредување.

Забелешка: Ако во дадено множество ученици, два ученика имаат иста висина, тогаш вака определената релација нема да биде антисиметрична. Зошто?

Задача 2

Во множеството $A = \{3, 5, 7\}$ зададени се релациите: $R_1 = \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ и } x = y\}$ и $R_2 = \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ и } x \leq y\}$. Претстави ги релациите: а) на табеларен начин, б) со граф. Дали некоја од релациите е релација за еквивалентност или релација за подредување?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Во множеството $B = \{22, 28, 35, 43, 82\}$ е зададена релацијата R: „...има иста цифра на единици со...“.
   а) Претстави ја релацијата R со граф.
   б) Провери дали R е релација на еквивалентност или релација за подредување.
2. Во множеството $K = \{a, b\}$ зададена е релацијата $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$. Дали R е релација на еквивалентност или релација на подредување?

3. Во множеството $M = \{3, 5, 7, 9\}$ зададена е релацијата R: „...е поголемо или еднакво на...“.
   а) Претстави ја релацијата R со граф.
   б) Провери дали R е релација на еквивалентност или релација за подредување.

4. Во множеството од бројни изрази $C = \{18 - 2 \cdot 3, 30 - 3 \cdot 4, 4 \cdot 5 - 8, 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4, (5 - 2) \cdot 4\}$ зададена е релацијата R: „...има иста вредност со...“.
   а) Претстави ја релацијата R со граф.
   б) Провери дали R е релација на еквивалентност или релација за подредување.

5. Дали релациите: R_1: „...не е повисок од...“, R_2: „...не е постар од...“ и R_3: „...не е потежок од...“, определени во множеството од ученици во едно училиште се релации за подредување? Објасни го твојот одговор.

6. На часовите по историја, учениците добиле податоци дека: освојувањето на Цариград од Османлиите се случило во 1453 година, откривањето на Америка од страна на Колумбо се случило во 1492 година, Француската револуција се случила во 1789 година, а потпишувањето на Повелбата за човекови права се случила во 1948 година.
   а) Воспостави релација R меѓу овие настани, според времето кога се случиле?
   б) Дали R е релација за подредување?

Истражување

Со помош на информации преку интернет најди податоци за времето на разградување во природата на отпадоци од: хартија, пластична кеса, алуминиумска лименка и јаболкова кора. Рангирај ги отпадоците според време на распаѓање.
Дали може да се воспостави релација за подредување меѓу отпадоците? Образложи го одговорот.

4. РЕЛАЦИИ ВО ПРАКТИКАТА

Активност

Учениците Ана, Борис, Драган и Емина играат фудбал, кошарка или одбојка. Познато е дека Ана и Драган играат одбојка, Борис игра фудбал и кошарка, а Емина игра кошарка.
а) Претстави ја релацијата R: „...игра ист спорт со...“, меѓу учениците на табеларен начин, на описен начин и со граф.
б) Дали R е релација на еквивалентност? Зошто?

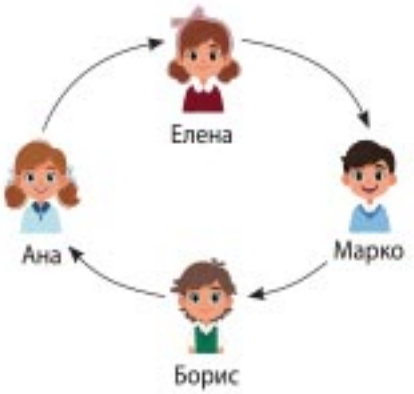
Пример 1

Во една библиотека учениците си разменуваат книги за читање како на слика 1.

а) Претстави ја релацијата
R_1: „...позајмил книга на...“ меѓу учениците со граф.

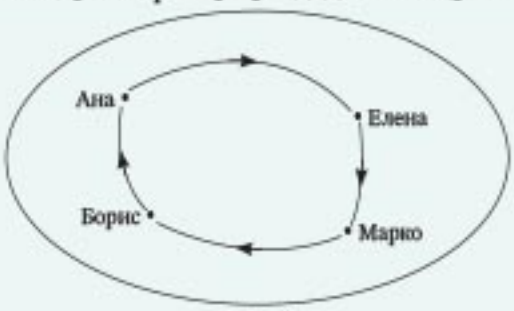
б) Провери дали релацијата е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

в) Претстави ја релацијата
R_2: „...може да добие книга по низа позајмувања од...“ меѓу учениците со граф
(на пример, ако Ана позајмила книга на Елена, а Елена на Марко, тогаш Марко може да добие книга од Ана со низата позајмувања Ана → Елена → Марко).
Дали R_2 е релација на еквивалентност?



слика 1

а) $R_1 = \{(\text{Ана, Елена}), (\text{Елена, Марко}), (\text{Марко, Борис}), (\text{Борис, Ана})\}$.
Претставувањето на релацијата R_1 со граф е дадено на цртеж 1.



црт. 1

б) Релацијата R_1:
- не е рефлексивна бидејќи, на пример, Ана не може да позајми книга на самата себе,
- не е симетрична, бидејќи, на пример, Ана позајмила книга на Елена, но Елена не позајмила книга на Ана,
- не е транзитивна, бидејќи, на пример, Ана позајмила книга на Елена, Елена позајмила книга на Марко, но Ана не позајмила книга на Марко.

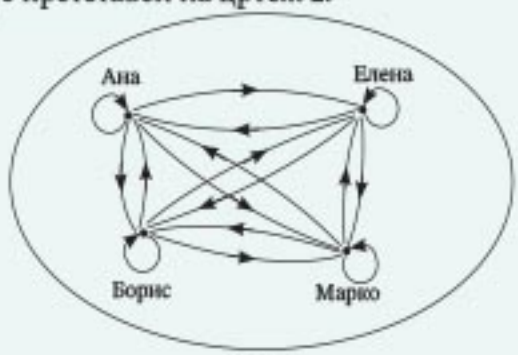
в) Според релацијата R_2:
Ана може да добие книга по низа позајмувања од:
Ана (Ана → Елена → Марко → Борис → Ана),
Елена (Елена → Марко → Борис → Ана),
Марко (Марко → Борис → Ана), Борис (Борис → Ана).

Елена може да добие книга по низа позајмувања од:
Елена (Елена → Марко → Борис → Ана → Елена),
Марко (Марко → Борис → Ана → Елена),
Борис (Борис → Ана → Елена), Ана (Ана → Елена).

Марко може да добие книга по низа позајмувања од:
Марко (Марко → Борис → Ана → Елена → Марко),
Борис (Борис → Ана → Елена → Марко),
Ана (Ана → Елена → Марко), Елена (Елена → Марко).

Борис може да добие книга по низа позајмувања од:
Борис (Борис → Ана → Елена → Марко →Борис),
Ана (Ана → Елена → Марко → Борис),
Елена (Елена → Марко → Борис), Марко (Марко → Борис).

Графот на релацијата R_2 е претставен на цртеж 2.



црт. 2

Релација R_2 е:

- рефлексивна, бидејќи секој ученик може да добие книга по низа од четири позајмувања, која започнува од него. На пример,
  Ана → Елена → Марко → Борис → Ана;
- симетрична, бидејќи ако еден ученик може да добие книга од друг ученик по низа позајмувања, тогаш и другиот ученик може да добие книга од првиот ученик по низа позајмувања. На пример, ако Елена може да добие книга по низа позајмувања од Борис, односно Борис → Ана → Елена, тогаш Борис може да добие книга по низа позајмувања од Елена, односно Елена → Марко → Борис.
- транзитивна, бидејќи ако еден може да добие книга по низа позајмувања од друг ученик, и другиот ученик може да добие книга по низа позајмувања од трет ученик, тогаш првиот ученик може да добие книга по низа позајмувања од третиот ученик. На пример, ако Марко може да добие книга по низа позајмувања од Ана (Ана → Елена → Марко), и Ана може да добие книга по низа позајмувања од Борис, (Борис → Ана), тогаш Марко може да добие книга по низа позајмувања од Борис (Борис → Ана → Елена → Марко).

Според тоа, R_2 е релација на еквивалентност.

Задача 1

Во училиштето се организира голем концерт, а учениците меѓусебно си даваат задачи за подготовка на сценографијата, музиката, светлата и промоцијата. Познато е дека:
Ана ја предводи групата за сценографија и им дава задачи на Борис и Елена;
Борис ја предводи групата за музика и им дава задачи на Марко и Нина;
Марко ја предводи групата за светла и им дава задачи на Петра и Дамјан;
Елена ја предводи групата за промоција и им дава задачи на Ана и Нина.

а) Претстави ја релацијата R_1: „...дава задача на...“, меѓу учениците на табеларен начин и со граф.
б) Провери дали релацијата R_1 е рефлексивна, симетрична и транзитивна.
в) Провери дали релацијата R_2: „...добива задача преку низа задачи од... “, е рефлексивна, симетрична и транзитивна?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Марко има вода, шеќер и сол, и сака да направи раствор за садење растенија. Тој го раствора шеќерот во вода, а потоа додава сол.
   а) Претстави ја релацијата R: „...се раствора пред...“, меѓу супстанците на табеларен начин и со граф.
   б) Провери дали релацијата R е транзитивна и антисиметрична.

2. Во лабораторија, ученикот ја загрева водата во три чаши:
   чаша А: од 20°C до 50°C, чаша Б: од 30°C до 60°C и чаша В: од 40°C до 80°C.
   а) Претстави ја релацијата R: „...има повисока почетна температура од...“, меѓу чашите на табеларен начин.
   б) Дали релацијата R е рефлексивна, симетрична и транзитивна? Образложи го одговорот.

3. Познато е дека планината Водно е висока 1011 m, планината Бистра е висока 2621 m и планината Кораб е висока 2764 m.
   а) Претстави ја релацијата R: „...е повисока од...“, меѓу планините на табеларен начин и со граф.
   б) Дали R е релација за подредување? Образложи го одговорот.

4. Во кабинетот по информатика, учениците Замира, Елена, Марко и Борис си разменуваат датотеки. Познато е дека Замира ѝ праќа датотека на Елена; Елена му праќа датотека на Марко; Марко му праќа датотека на Борис.
   а) Претстави ја релацијата R: „...праќа датотека на...“, меѓу учениците на табеларен начин и со граф.
   б) Дали R е релација за еквивалентност?

5. Во училишниот проект за обновливи извори, групите поставуваат мали генератори така што: соларниот панел ја дава енергијата на батеријата, батеријата ја дава енергијата на моторот, и моторот ја дава енергијата на вентилаторот.
   а) Претстави ја релацијата R_1: „...пренесува енергија на...“, меѓу малите генератори на табеларен начин и со граф.
   б) Определи нова релација R_2: „...може да влијае по низа преноси на...“, и провери дали таа е релација за еквивалентност.

6. **Проектна задача**
   Со примена на релациите низ проектот „Релации во мојот град“ поблиску ќе се запознаеш со состојбите во градот во којшто живееш и ќе бидеш во можност да најдеш начини за нивно подобрување.

За градот во кој живееш, определи ги множествата од: училишта, слаткарници, сендвичарници, маркети, магацини, автобуски постојки, паркови и музеи. Избери ги наведените множества со најмногу 5 елементи.

а) Определи релација во множеството:

- училишта, според бројот на учениците;
- училишта, според степенот на образование;
- слаткарници, според бројот на видови слатки кои се на понуда;
- сендвичарници, според бројот на видови сендвичи кои се на понуда;
- маркети, според цената на еден вид брашно кое се продава;
- маркети, според бројот на производи кои се на акција;
- магацини, според зафатнината на просторот за складирање;
- автобуски постојки, според тоа дали има директна линија меѓу нив;
- паркови, според површината;
- музеи, според бројот на експонати.

б) Претстави ги релациите со граф и утврди ги нивните својства. Кои од релациите се релации за еквивалентност, а кои се релации за подредување?

в) Објасни како својствата на определените релации влијаат на животот и динамиката во градот.

г) Преку додавање на нови индиректни влијанија, определи нови релации и претстави ги со граф. Објасни кои аспекти на градскиот живот би биле подобрени.

5. РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Позитивни и негативни рационални броеви

Активност

Селма сака да купи комплет од 5 пенкала што чини 22 денари.

а) Колку е цената на едно пенкало?

б) Дали постои природен број со кој можеме да ја запишеме цената на едно пенкало?

в) Дали постои цел број со кој можеме да ја запишеме цената на едно пенкало?

г) Како можеш да ја запишеш цената на едно пенкало?

Во множеството природни броеви $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ операциите одземање и делење не се секогаш изводливи. На пример, не постои природен број кој е еднаков на разликата $3 - 5$.

Со воведувањето на негативните броеви и нулата, множеството природни броеви го проширивме до множеството цели броеви $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ во кое операцијата одземање е секогаш изводлива.

Меѓутоа, операцијата делење и понатаму останува не секогаш изводлива во множеството природни броеви. На пример, не постои природен број што е еднаков на количникот 3 : 4.
За да го надминеме проблемот со делењето во множеството природни броеви, го проширивме со нови броеви – дропките.

Во таа смисла, на пример, прифаќаме дека количникот 3 : 4 е еднаков на дропката $\frac{3}{4}$ и дека $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\ldots$

Во новото множество дропки се содржат и природните броеви, бидејќи секој природен број може да се запише во вид на дропка со именител 1.

На пример, $1=\frac{1}{1}$, $2=\frac{2}{1}$, $3=\frac{3}{1}$, ...

Секој број запишан како дропка $\frac{a}{b}$, каде што $a, b \in \mathbb{N}$, се вика **позитивен рационален број**.

Множеството на сите позитивни рационални броеви го означуваме со $\mathbb{Q}^+$.

Запишуваме: $\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{N}\right\}$.

На пример, броевите $\frac{3}{4}$, 5, $\frac{7}{6}$ и $\frac{11}{5}$ се позитивни рационални броеви.

Задача 1

Кои од следните тврдења се точни: а) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$, б) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}^+$, в) $\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Q}^+$, г) $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{Q}^+$?

Операцијата делење не е секогаш изводлива и во множеството цели броеви.
На пример, не постои цел број што е еднаков на количникот 3 : (−4).
За да го надминеме проблемот со делењето во множеството цели броеви, треба да го прошириме со нови броеви.
За таа цел ќе прифатиме дека, на пример, важи

$$\frac{-2}{3}=\frac{-2\cdot(-1)}{3\cdot(-1)}=\frac{2}{-3},$$

што значи дропките $\frac{-2}{3}$ и $\frac{2}{-3}$ претставуваат еден ист број што ќе го означиме со $-\frac{2}{3}$,

односно важи $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}$.

Тоа значи дека, на пример, покрај дропката $\frac{2}{3}$ треба да ја разгледуваме и дропката $-\frac{2}{3}$.
Во новото множество на дропки се содржат и негативните цели броеви, бидејќи секој од нив може да се запише во вид на дропка со именител 1.

На пример, $-1=\frac{-1}{1}$, $-2=\frac{-2}{1}$, $-3=\frac{-3}{1}$,....

Секој број запишан во вид на дропка $-\frac{a}{b}$, каде $a, b \in \mathbb{N}$, се вика **негативен рационален број**.

Множеството на сите негативни рационални броеви го означуваме со $\mathbb{Q}^-$.

Запишуваме: $\mathbb{Q}^- = \left\{-\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{N}\right\}$.

На пример, броевите $-\frac{3}{4}, -4, -\frac{5}{3}, -\frac{17}{19}$ се негативни рационални броеви.

Задача 2

Кои од следниве тврдења се точни: а) $\mathbb{Z}^- \subseteq \mathbb{Q}^-$, б) $\mathbb{Z}^- \neq \mathbb{Q}^-$, в) $\mathbb{N} = \mathbb{Q}^-$?

Рационални броеви

Унијата од сите позитивни рационални броеви, сите негативни рационални броеви и бројот нула, се вика **множество на рационални броеви** и се означува со $\mathbb{Q}$, односно

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-.$$

Активност

Разгледај го дијаграмот на цртеж 1 и објасни ја врската меѓу множеството на природни броеви $\mathbb{N}$, множеството на цели броеви $\mathbb{Z}$ и множеството на рационални броеви $\mathbb{Q}$.



црт. 1

Од равенствата $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, каде што $a, b \in \mathbb{N}$, заклучуваме дека секој рационален број може да го запишеме во **стандарден облик** $\frac{a}{b}$, каде што $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$.

Според тоа, множеството на рационални броеви можеме да го запишеме во облик:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}.$$

Пример 1

Во табелата се дадени вредностите на температурите измерени во Скопје во текот на еден ден:

време	10 h наутро	12 h напладне	3 h попладне	7 h навечер	10 h ноќе
температура	11 °C	14 °C	17 °C	10 °C	5 °C

Колкава е промената на температурата на час во секој временски интервал?

Во интервалот од 10 h наутро до 12 h напладне, промената на температурата на час е $\frac{14\,^{\circ}\mathrm{C}-11\,^{\circ}\mathrm{C}}{2\,\mathrm{h}}=\frac{3}{2}\frac{^{\circ}\mathrm{C}}{\mathrm{h}}$.

Во интервалот од 12 h напладне до 3 h попладне, промената на температурата на час е $\frac{17\,^{\circ}\mathrm{C}-14\,^{\circ}\mathrm{C}}{3\,\mathrm{h}}=1\frac{^{\circ}\mathrm{C}}{\mathrm{h}}$.

Во интервалот од 3 h попладне до 7 h навечер, промената на температурата на час е $\frac{10\,^{\circ}\mathrm{C}-17\,^{\circ}\mathrm{C}}{4\,\mathrm{h}}=\frac{-7}{4}\frac{^{\circ}\mathrm{C}}{\mathrm{h}}$.

Во интервалот од 7 h навечер до 10 h ноќе, промената на температурата на час е $\frac{5\,^{\circ}\mathrm{C}-10\,^{\circ}\mathrm{C}}{3\,\mathrm{h}}=\frac{-5}{3}\frac{^{\circ}\mathrm{C}}{\mathrm{h}}$.

Мерните броеви на промената на температурата на час се рационалните броеви: $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{-7}{4}$ и $\frac{-5}{3}$. Меѓу нив, позитивни рационални броеви се $\frac{3}{2}$ и 1, а негативни рационални броеви се $\frac{-7}{4}$ и $\frac{-5}{3}$. Бројот 1, исто така, е и цел и природен број.

Пример 2

Кои од рационалните броеви $-4, \frac{1}{2}, -3, \frac{-1}{3}, 2, \frac{-3}{7}, \frac{5}{6}, 9$, се:

а) позитивни рационални броеви, б) негативни рационални броеви,
в) цели броеви, г) природни броеви?

а) Позитивни рационални броеви се $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{5}{6}$ и 9.

б) Негативни рационални броеви се $-4, -3, \frac{-1}{3}$ и $\frac{-3}{7}$.

в) Цели броеви се $-4, -3$, 2 и 9. г) Природни броеви се 2 и 9.

Задача 3

Дадено е множеството $P=\{-1, 0, \frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, -3, -4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, 8\}$. Запиши го множеството:

а) $M=\{x \mid x\in P \text{ и } x\in\mathbb{Z}\}$, б) $M=\{x \mid x\in P \text{ и } x\in\mathbb{Q}^{+}\}$, в) $M=\{x \mid x\in P \text{ и } x\in\mathbb{Q}^{-}\}$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Со помош на рационален број запиши ја реченицата:

а) Мира должи 11 000 денари, б) Соња има 300 монистри,

в) денес температурата е 4 °C под нулата,

г) вчера температурата беше 11 °C над нулата,

д) водостојот во Охридското езеро е $\frac{15}{2}$ cm понизок од нормалниот водостој.

2. Кое од следните тврдења е точно:

а) $-\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}^-$, б) $8 \in \mathbb{Z}^-$, в) $-55 \in \mathbb{Q}^+$, г) $0 \in \mathbb{Q}$, д) $0 \in \mathbb{Z}$?

3. Запиши множество:

а) A што се состои од пет позитивни рационални броеви,

б) B што се состои од пет негативни рационални броеви,

в) C што се состои од пет рационални броеви.

4. Лејла вели дека $\frac{5}{3}$ е рационален број, а 5 е само природен број.
Сеад вели дека и двата се рационални броеви. Кој е во право?

5. Препиши ја и пополни ја табелата според решениот пример во првата редица.

	множество						
број	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^+$	$\mathbb{Z}^-$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^+$	$\mathbb{Q}^-$
$-\frac{1}{4}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
0							
$-\frac{9}{2}$							
7							
-11							

6. Кои од следниве тврдења се точни:

а) $\mathbb{N} = \mathbb{Q}^+$, б) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, в) $\mathbb{Z}^- \cup \{0\} \subseteq \mathbb{Q}$, г) $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\} = \mathbb{Q}$,

д) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \varnothing$, ѓ) $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- = \mathbb{Q}$, ж) $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$, з) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \{0\}$?

Истражување

1. На цртеж 2 се претставени неколку рационални броеви на бројна оска.



црт. 2

а) Потсети се на правилото за нанесување на целите броеви на бројна оска. Според слично правило ги претставуваме и рационалните броеви на бројна оска.
Обиди се да го објасниш правилото за претставување на рационалните броеви на бројна оска. Кои рационални броеви се претставени десно од нулата, а кои лево од нулата?

б) Нацртај бројна оска и избери 6 рационални броеви, 3 позитивни и 3 негативни рационални броеви.

2. а) Потсети се на правилото за споредување на целите броеви со помош на бројна оска. Обиди се да го објасниш правилото за споредување на рационалните броеви со помош на бројна оска.

б) Потсети се дека за позитивните рационални броеви важи:

$\frac{2}{3}<\frac{4}{5}$ бидејќи $2\cdot 5<3\cdot 4$; $\frac{7}{6}>\frac{4}{9}$ бидејќи $7\cdot 9>4\cdot 6$; $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ бидејќи $3\cdot 8=6\cdot 4$.

Според истото правило спореди ги броевите:

$\frac{-2}{3}$ и $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$ и $\frac{-4}{5}$; $\frac{-4}{5}$ и $\frac{-4}{5}$, $\frac{-2}{3}$ и $\frac{-4}{6}$.

Потоа потврди го твојот одговор со помош на бројна оска.

в) Изведи општо правило за споредување на рационални броеви запишани во стандарден облик.

6. БЕСКОНЕЧНИ ПЕРИОДИЧНИ ДЕЦИМАЛНИ БРОЕВИ

Потсети се дека секоја дропка може да се запише со децимален број со наоѓање на количникот на броителот со именителот.

Активност

Запиши го обоениот дел од кругот:

а) со дропка, б) со децимален број.



Пример 1

Запиши ја со децимален број дропката: а) $\frac{3}{4}$, б) $\frac{1}{3}$.

а) $\frac{3}{4}=0,75$ Кога делењето завршува добиваме **конечен децимален број**.

б) $\frac{1}{3}=0,333...$ Кога делењето не завршува добиваме **бесконечен периодичен децимален број** или накусо **периодичен децимален број**.

- Периодичен децимален број кај кој непосредно по децималната запирка има конечна низа цифри кои се повторуваат по ист редослед се вика **чист периодичен децимален број**.
- Периодичен децимален број кај кој по неколку ненулти децимали има конечна низа цифри кои се повторуваат по ист редослед се вика **мешан периодичен децимален број**.
- Низата од цифри што се повторува се вика **период на децималниот број**.

Конечни децимални броеви се, на пример, броевите: 2,65 и 36,567834.
Бројот 0,3333333333333... = 0,(3) е чист периодичен децимален број со период 3.
Бројот 2,3(27) = 2,3272727272727... е мешан периодичен децимален број со период 27.

Задача 1

Запиши ја со децимален број дропката: а) $\frac{1}{5}$, б) $\frac{11}{37}$.

Кој од добиените децимални броеви е конечен децимален број, а кој бесконечен децимален број? Колку е периодот на бесконечниот децимален број?

Пример 2

Запиши го со дропка децималниот број: а) 0,25; б) 0,(16); в) 2,36(4).

а) Бројот 0,25 е конечен децимален број. Тој може да се запише во облик на децимална дропка:

$$x = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

б) Бројот 0,(16) е чист периодичен децимален број со период 16. Тој може да се запише како дропка со следната постапка:

$0,(16) = x$	Ја означуваме непознатата дропка со x.
$0,(16) \cdot 100 = x \cdot 100$	Периодот е двоцифрен број, па затоа ги
$16,(16) = x \cdot 100$	множиме двете страни со 100.
$16 + 0,(16) = x \cdot 100$	Децималниот број го запишуваме како збир од цел број и даденият децимален број.
$16 + x = x \cdot 100$	0,(16) го заменуваме со x и ја решаваме линеарната равенка по непознатата x.
$16 = x \cdot 100 - x$	
$16 = x(100 - 1)$	
$x = \frac{16}{100-1} = \frac{16}{99}$.	Нејзиното решение е $x = \frac{16}{99}$.

Според тоа, добиваме дека $0,(16) = \frac{16}{99}$.

в) Бројот 2,36(4) е мешан периодичен децимален број. Тој може да се запише како дропка на следниот начин:

$2,36(4)=x$ Ја означуваме непознатата дропка со x.

$236,(4)=100\cdot x$ Повторувањето започнува по втората децимала, па ги множиме двете страни со 100.

$2364,(4)=1000\cdot x$ Има 3 цифри пред почетокот на периодот на децималниот број, па ги множиме двете страни на равенката $2,36(4)=x$ со 1000.

Ги одземаме двете равенки.

$2364,(4)-236,(4)=1000\cdot x-100\cdot x$

$2128=900\cdot x$

$x=\frac{2128}{900}=\frac{532}{225}=2\frac{82}{225}$.

Според тоа, добиваме дека $2,36(4)=2\frac{82}{225}$.

Задача 2

Запиши го со дропка децималниот број: а) 0,75; б) 0,(6); в) 2,1(45).

Задача 3

На велосипедска рута „Зелениот прстен", трасата се состои од три дела: дел А со должина 0,(6) km, дел В со должина 1,2(3) km и дел С со должина 2,(45) km.

а) Запиши ги должините како дропки.

б) Колкава е должината на една цела обиколка?

в) Марко направил 3 обиколки и потоа го извозел уште делот А. Колку километри поминал Марко?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Запиши ја со децимален број дропката: а) $\frac{2}{3}$, б) $\frac{1}{2}$, в) $\frac{9}{20}$, г) $\frac{77}{390}$, д) $\frac{77}{330}$.
2. Со користење на ознаката за период на децимален број запиши го бројот:
   а) 0,3989898..., б) 4,7102102..., в) 0,2540314031..., г) 243,2526161....
3. Најди го периодот на децималниот број запишан со дропката: а) $\frac{7}{9}$, б) $\frac{42}{37}$, в) $\frac{118}{123}$.
4. Запиши го периодичниот децимален број со дропка:
   а) 0,(7); б) 3,(21); в) 1,2(34); г) 4,3(123); д) 5,12(7).
5. За поставување шатор се сечат три јажиња со должина 0,(8) m, 2,3(5) m и 3,(27) m.
   а) Изрази ја должината на секое јаже како дропка.
   б) Митко имал јаже долго 10 m. Колку метри јаже ќе му преостане по сечењето?
6. Еден автомобил изминал пат долг 1 km. Првиот дел од патот долг 0,4 km автомобилот го изминал со просечна брзина од 0,(833) km/h. Вториот дел од патот долг 0,6 km автомобилот се движел со брзина од 1,2(5) km/h.
   а) Запиши го мерниот број на секоја од брзините со дропка.
   б) Колку време во часови било потребно да се измине секој дел од патот?

7. ЕДНАКВОСТ НА ДРОПКИ, ДЕЦИМАЛНИ БРОЕВИ И ПРОЦЕНТИ

Активност

Ана имала дел од чоколадо. Борјан вели дека Ана изела $\frac{1}{2}$ од чоколадото, Мерита вели дека изела 0,5 од чоколадото, а Суад вели дека изела 50% од чоколадото. Дали Борјан, Мерита и Суад, на различни начини, искажале ист дел од чоколадото што го изела Ана? Објасни го твојот одговор.

Пример 1

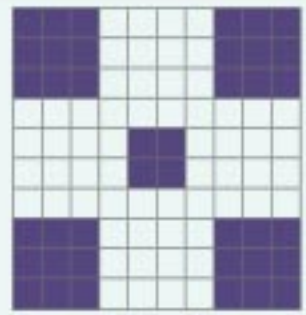
Колкав дел од квадратот на цртеж 1 е обоен?

Обоениот дел од квадратот можеме да го запишеме на три начини:

$\frac{40}{100}$ од квадратот,

0,4 од квадратот,

40% од квадратот.



црт. 1

Пример 2

Изрази ја во проценти дропката: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{3}{8}$, в) $\frac{1}{3}$.

а) $\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\cdot 100\right)\%=50\%$, б) $\frac{3}{8}=\left(\frac{3}{8}\cdot 100\right)\%=\frac{300}{8}\%=37,5\%$, в) $\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\cdot 100\right)\%\approx 33,3\%$.

Пример 3

Изрази го во проценти децималниот број: а) 0,42; б) 3,6; в) 0,054.

а) $0,42=(0,42\cdot 100)\%=42\%$, б) $3,6=(3,6\cdot 100)\%=360\%$, в) $0,054=(0,054\cdot 100)\%=5,4\%$

Број или дропка се изразува во проценти кога прво ќе се помножи со 100 и потоа кон добиениот производ се запише знакот „%“ за проценти.

Пример 4

Изрази ги во дропка процентите: а) 37%, б) 18%, в) 56%.

а) $37\% = \frac{37}{100}$, б) $18\% = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$, в) $56\% = \frac{56}{100} = \frac{14}{25}$.

Пример 5

Изрази ги со децимален број процентите: а) 8%, б) 70%, в) 35%.

а) $8\% = \frac{8}{100} = 0{,}08$; б) $70\% = \frac{70}{100} = 0{,}7$; в) $35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$.

Проценти се изразуваат во број, кога бројот на проценти ќе се подели со 100 и ќе се изостави знакот „%“ за проценти.

Пример 6

Изрази го во проценти делот од правоаголникот на цртеж 2 обоен со зелена боја.

$\frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5} \cdot 100\right)\% = 80\%$ од правоаголникот е обоен со зелена боја.

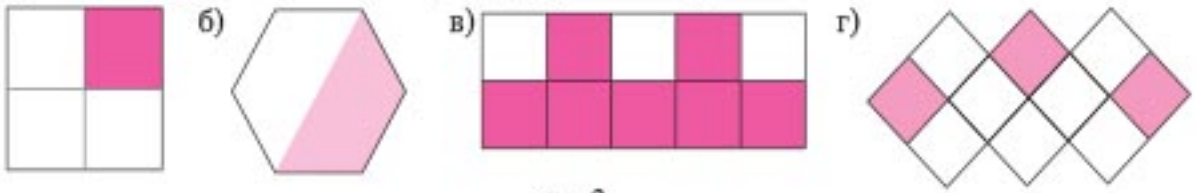


црт. 2

Задача 2

Изрази го во проценти обоениот дел од формата на цртеж 3:

а) б) в) г)



црт. 3

Пример 7

Марија нарачала пица во ресторан поделена на 8 парчиња. Таа изела 3 парчиња, а нејзината другарка Арта изела 1 парче. Запиши го со дропка и со процент делот од пицата:

а) што го изела Марија, б) што го изела Арта, в) што останал неизеден.

а) Марија изела $\frac{3}{8}$ од пицата, односно 37,5% од пицата, бидејќи

$\frac{3}{8}=\left(\frac{3}{8}\cdot 100\right)\%=37{,}5\%$.

б) Арта изела $\frac{1}{8}$ од пицата, односно 12,5% од пицата, бидејќи

$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{8}\cdot 100\right)\%=12{,}5\%$.

в) Делот од пицата што останал неизеден е $\frac{1}{2}$ од пицата, односно 50% од пицата, бидејќи

$1-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)=1-\frac{4}{8}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\cdot 100\right)\%=50\%$.

Пример 8

Мина сака да купи овошје за цела недела. Во продавницата, се прикажани цените: јаболка: $\frac{1}{2}$ kg за 30 денари, банани: 0,75 kg за 45 денари, портокали: 40% од kg за 24 денари.

а) Пресметај ја цената по килограм за секое овошје.

б) Направи табела во која ќе ги претставиш сите овошја со нивните количини во облик на дропка, децимален број и процент, и цените за килограм.

в) Мина има 90 денари. Што може да купи за да го искористи целиот буџет?

а) Ако $\frac{1}{2}$ kg јаболка чини 30 денари, тогаш 1 kg ќе чини $30:\frac{1}{2}=30\cdot 2=60$ денари.

Ако 0,75 kg банани чини 45 денари, тогаш 1 kg ќе чини $45:0{,}75=60$ денари.

Ако 0,4 kg портокали чини 24 денари, тогаш 1 kg ќе чини $24:0{,}4=60$ денари.

б)

овошје	дропка	децимален број	процент	цена за 1 kg
јаболка	$\frac{1}{2}$	0,5	50%	60 денари
банани	$\frac{3}{4}$	0,75	75%	60 денари
портокали	$\frac{2}{5}$	0,4	40%	60 денари

в) Сите овошја имаат иста цена за килограм. Мина може да комбинира различни видови овошја со маса 1,5 kg за да го искористи целиот буџет.

Задача 3

Во училишната кујна за ужина, учениците купуваат сокови. Андреј испил $\frac{3}{5}$ од литарски сок од портокал, Бела испила 0,6 од литарски сок од јаболко и Вања испила 60% од литарски сок од грејпфрут.

а) Направи табела во која секоја количина на испиен сок ќе ја запишеш со дропка, децимален број и процент.

б) Колку милилитри сок испил секој ученик?

в) Кој ученик испил најмногу сок, а кој најмалку?

г) Користејќи ја табелата напиши краток заклучок.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Прецртај ја и пополни ја табелата:

процент	42%				12%
децимален број		0,65		0,07	
дропка			$\frac{17}{20}$		

2. На натпревар по математика, еден ученик решил $\frac{2}{5}$ од задачите.

а) Изрази ја дропката $\frac{2}{5}$ со децимален број.

б) Изрази ја истата дропка со проценти.

в) Дали 0,4 и 40% определуваат еднакви количества како $\frac{2}{5}$? Образложи го одговорот.

г) Ако друг ученик решил 75% од задачите, која е соодветната дропка и децимален број?

3. Во продавница Јусуф купил $\frac{2}{3}$ kg јаболка, Марко купил 0,5 kg банани и Ана купила 80% од еден килограм портокали. Од кој вид овошје е купено најголемо количество?

4. Богдан трчал 3 дена по иста патека. Првиот ден истрчал 0,6 од патеката, вториот ден истрчал $\frac{5}{8}$ од патеката, и третиот ден истрчал 55% од патеката.
Во кој ден истрчал најголем дел од патеката?

5. Софија, Дамјан и Арбнора имале иста сума на пари. Тие вложиле пари во инвестициски фонд. Софија вложила 0,75 од својата сума, Дамјан вложил $\frac{5}{8}$ од својата сума, а Арбнора вложила 70% од својата сума.
Кој ученик вложил најмногу?

Скенирај го кодот и реши ги задачите.

6. Учениците прават модели од глина. Мелита завршила $\frac{9}{20}$ од својот модел, Ања завршила 0,45 од својот модел, а Марко завршил 50% од својот модел.
Процени кој направил најголем дел од моделот и предложи како би можеле да ги комбинираат трите модели во еден за да се добие целосен модел.

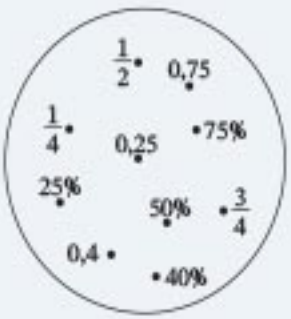
Истражување

Прецртај го дијаграмот на цртеж 4 во тетратката.

а) Поврзи ги дропката, децималниот број и процентот кои изразуваат иста количина.

б) Дали релацијата
R: „...претставува иста количина со...“
дефинирана во множеството
претставено со дијаграмот е рефлексивна,
симетрична и транзитивна?

в) Дали релацијата *R* е релација за еквивалентност?



црт. 4

8. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ДРОПКИ И ПРОЦЕНТИ ОД КОЛИЧИНИ

Активност

Во една кутија има 100 бонбони. 25% се црвени, 50% се сини и остатокот се жолти.
а) Колку црвени, колку сини, а колку жолти бонбони има во кутијата?
б) Колкав дел од сите бонбони се жолти? Изрази го делот на жолти бонбони со дропка и со процент.
в) Ако изедеш 50% од сите бонбони, колку ќе останат?

Пример 1

Во училишната библиотека се купени 120 книги. Од нив 40% се научна литература, $\frac{1}{4}$ се романи, а преостанатите се други категории.
а) Колку книги се научна литература? б) Колку книги се романи?
в) Изрази ги останатите книги како дропка и како процент од вкупниот број книги.
г) Од која категорија книги има најмногу, а од која најмалку книги?

а) Научната литература е 40% од 120 книги, односно $0{,}4 \cdot 120 = 48$ книги.

б) $\frac{1}{4}$ од 120 книги се романи, односно $\frac{1}{4} \cdot 120 = 30$ книги.

в) Од другите категории има $120 - (48 + 30) = 120 - 78 = 42$ книги.

Како дропка од 120 книги останатите категории се $\frac{42}{120} = \frac{7}{20}$.

Како процент од 120 книги, останатите категории се $\frac{42}{120} \cdot 100 = 35\%$.

г)

категорија	број на книги	дропка	процент
научна литература	48	$\frac{48}{120} = \frac{2}{5}$	40%
романи	30	$\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$	25%
останати	42	$\frac{7}{20}$	35%

Најмногу книги има научна литература: 48 книги или 40% од бројот на книги. Најмалку има романи: 30 книги или 25% од бројот на книги. Останатите категории се 42 книги или 35% од бројот на книги.

Задача 1

Во училишниот спортски клуб се набавуваат нови спортски реквизити. Вкупно се набавени 150 реквизити, $\frac{1}{3}$ од нив се топки за фудбал, 20% се рекети за тенис и остатокот се јажиња за вежби.

а) Колку топки за фудбал се набавени? б) Колку рекети за тенис се набавени?
в) Изрази го бројот на јажиња како дропка и како процент од вкупната количина.
г) Спореди која категорија реквизити е најмногу, а која најмалку застапена.
д) Дали ако се додадат уште 10 јажиња, процентот на јажиња ќе се зголеми или ќе се намали? Образложи го одговорот.

Пример 2

Во лабораторија се подготвува воден раствор на шеќер при собна температура. Во 300 ml вода се растворааат 100 g шеќер. Потоа се додаваат уште 200 g шеќер, кои целосно се растворааат.
а) Колкав дел од масата на почетниот раствор претставува шеќерот?
б) Колкав е процентот на шеќер во почетниот раствор?
в) Колкав е новиот процент на шеќер по додавањето на уште 200 g шеќер?
г) Дали концентрацијата се зголемила и за колку проценти?

а) Под претпоставка дека 1 ml вода $\approx$ 1 g вода, шеќерот претставува
$\frac{100\text{ g}}{(300\text{ g}+100\text{ g})}=\frac{100\text{ g}}{400\text{ g}}=\frac{1}{4}$ од почетниот раствор.
б) Процентот на шеќер во почетниот раствор е
$\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{25}{100}=25\%$.
в) По додавање на 200 g шеќер, шеќерот претставува
$\frac{100\text{g}+200\text{g}}{400\text{g}+200\text{g}}=\frac{300\text{g}}{600\text{g}}=\frac{1}{2}$ од новиот раствор.
Процентот на шеќер во новиот раствор е
$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 50}{2\cdot 50}=50\%$.
г) Концентрацијата на шеќер во растворот се зголемила за
$50\%-25\%=25\%$
што е очекувано, бидејќи количеството на шеќер се зголемило, а количеството на вода остана исто.

Задача 2

Во училишната лабораторија се истражува составот на клетки од алги. Во еден примерок има 600 клетки. Од нив $\frac{2}{3}$ се клетки од зелени алги, 20% се клетки од црвени алги и остатокот се клетки од други видови алги.
а) Колку клетки се од зелените алги? б) Колку клетки се од црвените алги?
в) Колку клетки се од други видови алги? Изрази го нивниот број како дропка и процент од вкупниот број клетки.
г) Спореди која категорија клетки од алги е најмногу застапена, а која најмалку.
д) Ако бројот на клетки од црвени алги се зголеми за 30 клетки, за колку ќе се промени процентот на клетки од црвени алги?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Во училишната трпезарија се подготвуваат вкупно 200 порции ручек. $\frac{3}{8}$ од порциите се за вегетаријанци, 30% од порциите се без глутен и не се вегетеријански, а остатокот се редовни порции.

а) Колку порции се за вегетаријанци? б) Колку порции се без глутен?

в) Колку порции се редовни? Изрази ги нивниот број со дропка и со процент од вкупниот број порции.

г) Кој вид на порции е најмногу застапен, а кој најмалку?

д) Ако се подготват уште 20 редовни порции, како ќе се промени процентот на редовни порции?

2. Во продавница, Петар купил три предмети. Првиот чинел 1 200 денари со попуст од 15%, вториот чинел 850 денари со попуст од 20% и третиот чинел 600 денари со попуст од 10%.

а) Пресметај колку ќе плати Петар за секој предмет по попустот.

б) Колку денари ќе заштеди вкупно по попустите?

в) Изрази го во проценти делот од вкупната цена на секој предмет по попустот.

3. Во училиште има 240 ученици, кои се делат во групи за проект. $\frac{1}{3}$ од учениците се во групата за истражување на животната средина, 25% се во групата за информатика и остатокот се во групата за физика.

а) Колку ученици има во секоја група?

б) Изрази го бројот на ученици од секоја група како процент од вкупниот број ученици.

в) Спореди ги групите и одреди која има најмногу и која најмалку ученици.

4. Во експеримент по хемија се прави раствор. Во 750 ml вода се растворени 90 g шеќер. Потоа се додадени уште 60 g шеќер.

а) Пресметај го процентот на шеќер во растворот пред додавањето.

б) Пресметај го новиот процент на шеќер по додавањето.

в) Изрази го со дропка зголемувањето на шеќерот како дел од почетниот раствор.

5. Во спортски клуб се набавуваат 180 реквизити. $\frac{2}{5}$ се фудбалски топки, 30% се кошаркарски топки и остатокот се рекети за тенис.

а) Колку реквизити има од секоја категорија?

б) Изрази го бројот на реквизитите како дропка и процент од вкупниот број на реквизити.

в) Ако се продадат 10 фудбалски топки, како тоа ќе влијае на процентот на фудбалски топки?

Скенирај го кодот и реши ги задачите.

6. Во истражувањето на едно езеро има 600 риби. $\frac{1}{4}$ се кларки, 150 се шарани, а останатите се од други видови риба.

а) Колку риби се од други видови? Изрази го со дропка делот на другите видови риба во однос на сите риби во езерото.

б) Изрази го во проценти бројот на риби во секоја категорија.

в) Која категорија риби е најмногу застапена во езерото? Дали кларките или шараните се повеќе застапени?

9. ПРИМЕНА НА ПРОЦЕНТИ

Активност

Во една продавница се продаваат следните прозводи: пегла 1200 денари, телевизор 32 000 денари, лаптоп 78 000 и микробранова печка 4000 денари. Овие цени се зголемиле за 20%.

а) За колку денари се зголемила цената на секој производ?

б) Колкава е цената на секој производ по зголемувањето?

Пример 1

Во еден трговски центар јакна чини 3600 денари. Прво била намалена за 25% заради акција, а потоа новата цена се зголемила 10% заради додавање на ДДВ.

а) Колку ќе чини јакната по намалувањето?

б) Колку ќе чини по зголемувањето на претходно намалената цена?

в) Ако Мила има 3000 денари, дали ќе може да ја купи јакната? Објасни го твојот одговор.

а) Намалување на јакната е 25% од 3600 денари и изнесува

$25\% \cdot 3600 = \frac{25}{100} \cdot 3600 = 900$ денари.

Новата цена на јакната е 3600 – 900 = 2700 денари.

До новата цена на јакната може да дојдеме ако пресметаме 100% – 25%=75% од цената на јакната:

$75\% \cdot 3600 = \frac{75}{100} \cdot 3600 = 2700$ денари.

б) Зголемување од 10% на новата цена, заради додавање на ДДВ, е 10% од 2700 и изнесува

$10\% \cdot 2700 = \frac{10}{100} \cdot 2700 = 270$ денари.

Цената на јакната со вклучен ДДВ е 2700 + 270 = 2970 денари.

в) Мила има 3000 денари. Бидејќи

3000 – 2970 = 30 денари,

Мила ќе може да ја купи јакната и ќе ѝ останат 30 денари.

Задача 1

Семејството Петрови платило сметка за струја од 4800 денари во јануари. Во февруари потрошувачката е намалена за 15% поради штедење, но поради зголемување на цената на струјата, сметката за март се зголемува за 20%.

а) Колкава е сметката за февруари?

б) Колкава е сметката за март (по зголемувањето)?

в) За колку денари е поголема мартовската сметка во споредба со јануарската?

Пример 2

Еден лабораториски сад содржи 500 g вода. Поради загревање, во текот на експериментот испариле 12% од водата. Потоа, во садот се додаваат 100 g сол и се меша додека не се раствори.

а) Колкава е новата маса на водата по испарувањето?

б) Колкава е вкупната маса на растворот по додавањето на солта?

а) Масата на испарената вода е 12% од 500 и изнесува

$$12\% \cdot 500 = \frac{12}{100} \cdot 500 = 60 \text{ грама}$$

Нова маса на водата е $500 - 60 = 440$ грама.

б) Вкупна маса на растворот е

$440\ g\ (\text{вода}) + 100\ g\ (\text{сол}) = 540\ g.$

Задача 2



Во Петриев сад се одгледува колонија на бактерии која на почеток има 250 000 бактерии. По 6 часа бројот на бактерии е зголемен за 40%. По дополнителни 6 часа, бројот на бактерии се зголемува уште за 25%.

а) Колкав е бројот на бактерии по првите 6 часа?

б) Колкав е бројот на бактерии по вкупно 12 часа?

в) За колку проценти вкупно е зголемена колонијата во однос на почетниот број?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Во една продавница цената на лаптоп е 48 000 денари. Во период на акција прво е намален за 15%, а потоа дополнително за уште 10% од новата цена.
   а) Колкава е крајната цена на лаптопот?
   б) Дали попустот е ист како едноставно намалување од 25%?
2. Во аквариум имало 120 риби. По неколку месеци бројот на рибите се зголемил за 35%. Потоа 20% од новиот број на риби угинале поради недоволно кислород. Колку риби имало на крајот во аквариумот?
3. Едно езеро има волумен од 50 000 000 m^3 вода. За време на суша, нивото на водата се намалува за 12%. Следната година врнежите ја зголемуваат количината на вода за 8% од новиот волумен. Колкав е волуменот на езерото по овие промени?
4. Во лабораторија се подготвува раствор со 800 g вода и 200 g сол. Потоа испаруваат 10% од водата. Колкава е новата маса на растворот и колкава е процентната концентрација на солта по испарувањето?
5. Едно USB има капацитет од 64 GB. На него се зачувани датотеки кои зафаќаат 75% од просторот. Од тие податоци, ученикот избришал 20% за да ослободи место. Колку GB меморија е слободна по бришењето?
6. Ако цената на производ прво се зголеми за 10%, а потоа се намали за 10%, дали крајната цена е иста како почетната? Објасни го твојот одговор.

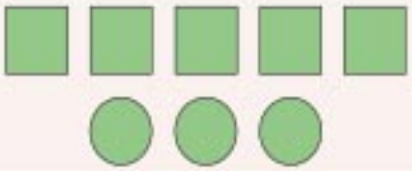
10. РАЗМЕР

Упростување размер

Активност

Според цртеж 1, запиши го количникот од:
а) бројот на кругови со бројот на квадрати,
б) бројот на квадрати со бројот на кругови.
Како се именуваат и што покажуваат количниците што ги запиша?

Скенирај го кодот и потсети се за размер.



црт. 1

Да се потсетиме дека количникот $a : b$ од мерните броеви на две истородни величини, мерени во иста мерна единица, се вика **размер** на тие две величини.
Броевите a и b се викаат **членови** на размерот. Записот $a : b$ го читаме како „a спрема b“.

Пример 1

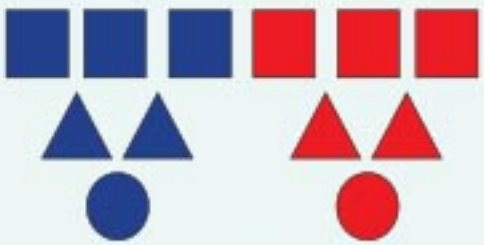
Дадените размери запиши ги скратено како еден размер.
а) 4 : 9 и 9 : 5, б) 7 : 2, 2 : 9, 9 : 8 и 8 : 3.

а) Од размерите 4 : 9 и 9 : 5 произлегува скратениот запис 4 : 9 : 5 којшто, исто така, го нарекуваме размер. Тој е составен од три члена и го читаме како „4 спрема 9 спрема 5“.
б) Со размерите 7 : 2, 2 : 9, 9 : 8 и 8 : 3 е определен размерот 7 : 2 : 9 : 8 : 3, којшто има пет члена.

Пример 2

Според цртеж 2, запиши го размерот на:
а) триаголници спрема квадрати,
б) кругови спрема триаголници спрема квадрати.

а) Размерот на триаголници спрема квадрати е 4 : 6.
Ова значи дека **на секои 4 триаголници има 6 квадрати**.
Можеме да видиме дека **на секои 2 триаголници има 3 квадрати**, па размерот 4 : 6 може да се **упрости** до размерот 2 : 3. Запишуваме 4 : 6 = 2 : 3 во смисла дека двата размери определуваат ист однос.



црт. 2

Од размерот 4 : 6 се добива размерот 2 : 3, кога секој негов член ќе се подели со НЗД (4, 6) = 2. Членовите на размерот 2 : 3 се заемно прости природни броеви, односно НЗД (2, 3) = 1, и тој не може понатаму да се упростува.

б) Размерот на кругови спрема триаголници спрема квадрати е 2 : 4 : 6.

Значи, **на секои 2 круга има 4 триаголници и на секои 4 триаголници има 6 квадрати.** Можеме да видиме дека **на секој 1 круг има 2 триаголници и на секои 2 триаголници има 3 квадрати,** па размерот 2 : 4 : 6 може да се **упрости** до размерот 1 : 2 : 3.

Запишуваме 2 : 4 : 6 = 1 : 2 : 3, во смисла дека двата размери определуваат ист однос.

Од размерот 2 : 4 : 6 се добива размерот 1 : 2 : 3, кога секој негов член ќе се подели со НЗД (2, 4, 6) = 2. За размерот 1 : 2 : 3 важи НЗД (1, 2, 3) = 1, и тој не може понатаму да се упростува.

Пример 3

Упрости го размерот:

а) 3 : 18 : 6 : 30, б) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$, в) 1,25 : 0,5 : 2,75, г) 45% : 52% : 17%, д) 25 cm : 0,1 m : 0,3 dm.

а) $3 : 18 : 6 : 30 = 1 : 6 : 2 : 10$ Секој член го делиме со НЗД (3, 18, 6, 30) = 3.

б) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \left(12 \cdot \frac{1}{2}\right) : \left(12 \cdot \frac{2}{3}\right) : \left(12 \cdot \frac{3}{4}\right)$ Секој член го множиме со НЗС (2, 3, 4) = 12.

$= 6 : 8 : 9$

в) $1{,}25 : 0{,}5 : 2{,}75 = 125 : 50 : 275$ Секој член го множиме со 100 (со декадна единица со толку нули колку што има децималниот број со најмногу децимални места).

$= 5 : 2 : 11$

г) $45\% : 52\% : 17\% = \frac{45}{100} : \frac{52}{100} : \frac{17}{100}$ Процентите ги запишуваме со дропка.

$= 45 : 52 : 17$

д) 25 cm : 0,1 m : 0,3 dm = 25 cm : 10 cm : 3 cm Должините ги изразуваме во **иста единица.**

$= 25 : 10 : 3$

Задача 1

Упрости го размерот а) 36% : 0,6 : 6, б) 0,5 kg : 250 g : 1,25 kg.

Задача 2

Соседите Аце и Мирсад измешале сина, жолта и бела боја за бојадисување на нивните огради.

Аце измешал: 2,4 *l* сина, 4 *l* жолта и 1,6 *l* бела боја.

Мирсад измешал: 1,8 *l* сина, 3 *l* жолта и 1,2 *l* бела боја.

Дали добиле исто количество растворена боја? Дали добиле иста нијанса на зелена боја?

Упатство: Запиши ги размерите во кои Аце и Мирсад ги измешале боите, а потоа упрости ги.

Делење количество во даден размер

Кога количество е поделено во даден размер на два или повеќе дела, можеме да дознаеме колкаво количество има секој дел.

Активност

Другарките Ива и Марија ја поделиле роденденска торта во размер 2 : 3.



а) Ако Ива добила 2 дела, колку делови добила Марија?

б) На колку еднакви парчиња била пресечена тортата, за да се подели на другарките?

Пример 1

Сума од 250 денари е поделена на Лука, Илина и Сеад во размер 3 : 5 : 2. Колку денари добил секој од нив?

За секои 3 дела што ги добива Лука, Илина добива 5 дела, а Сеад добива 2 дела. Имаме вкупно

$3 + 5 + 2 = 10$ дела.

Сумата од 250 денари ќе ја поделиме со 10 за да ја најдеме вредноста на 1 дел:

$250 : 10 = 25$ денари.

Еден дел има вредност 25 денари.

Лука добил $3 \cdot 25 = 75$ денари, Илина добила $5 \cdot 25 = 125$ денари, а Сеад добил $2 \cdot 25 = 50$ денари.

Задача 1

Подели: а) 48 бонбони во размер 1 : 2 : 3, б) 440 метри во размер 6 : 3 : 1.

Пример 2

Автопат долг 140 km е поделен на делници во размер 2 : 5 : 3 : 4. Колку километри е долга секоја делница?

Првата делница се состои од 2 дела, втората делница од 5 дела, третата делница од 3 дела и четвртата делница од 4 дела. Имаме вкупно

$2 + 5 + 3 + 4 = 14$ дела.

Должината на автопатот од 140 km ќе ја поделиме со 14 за да ја најдеме должината на 1 дел:

$140 : 14 = 10$ km.

Еден дел има должина 10 km. Според тоа: првата делница е долга $2 \cdot 10 = 20$ km, втората делница е долга $5 \cdot 10 = 50$ km, третата делница е долга $3 \cdot 10 = 30$ km и четвртата делница е долга $4 \cdot 10 = 40$ km.

Задача 2

На кошаркарски натпревар екипата А ја победила екипата Б со резултат 72 : 48.
Бројот на постигнати поени по играч е даден во табелата:

Екипа А

играч	број на постигнати поени
Мирко	8
Сенад	16
Филип	22
Менсур	18
Иван	8

Екипа Б

играч	број на постигнати поени
Бесим	6
Саво	18
Фатмир	4
Илија	12
Марио	8

Организаторот поделил:

а) 20 ваучери за спортска опрема на екипите, според бројот на постигнати поени.
По колку ваучери добила секоја екипа?

б) 60 ваучери за посета на спортски настани на играчите, според бројот на постигнати поени.
По колку ваучери добил секој играч?

Пример 3

Атлетичарите Борис, Ана и Халил трчале кругови на атлетска патека. Бројот на кругови на Борис спрема бројот на кругови на Ана спрема бројот на кругови на Халил биле во размер 2 : 3 : 4. Познато е дека Борис истрчал 24 круга.
Колку кругови истрчала Ана, а колку Халил? Колку кругови истрчале атлетичарите заедно?

Борис истрчал 24 круга што претставуваат 2 дела од вкупно истрчаните кругови.
Според тоа 1 дел од истрчаните кругови изнесува 12 истрчани кругови.
Ана истрчала $3 \cdot 12 = 36$ кругови, а Халил истрчал $4 \cdot 12 = 48$ кругови.
Атлетичарите истрчале заедно $24 + 36 + 48 = 108$ кругови.

Задача 3

Лара направила колач во кој односот на брашно, шеќер и овошје е 8 : 4 : 2.
Лина има 400 g брашно и сака да подготви колач со ист вкус.
Колку грама шеќер треба да употреби Лина за нејзиниот колач? Колку грама овошје треба да употреби?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Упрости го размерот:

а) 96 : 60 : 120 : 36, б) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} : \frac{1}{6} : \frac{7}{8}$, в) 1,6 : 6,4 : 4 : 2,4.

2. Упрости го размерот:
а) 1800 g : 3 kg : 60 dag, б) 450 mm : 75 cm : 1,5 m : 1 m, в) 3 km : 150 m : 450 m,
г) 25 cm : 1 m : 1,5 dm, д) 120 минути : 4 часа : 2,5 часа, ѓ) 900 m*l* : 4,5 *l* : 13,5 d*l*.

3. Украсна лента се состои од три дела. Првиот дел има должина 1,2 m, вториот дел има должина 80 cm и третиот дел има должина 450 mm. Запиши го и упрости го размерот што одговара на должините на деловите на украсната лента.

4. Подели во дадениот размер:
а) 780 kg во размер 2 : 7 : 4, б) 2520 m во размер 5 : 8 : 7,
в) 3600 h во размер 2 : 8 : 5 : 3, г) 680 денари во размер 8 : 3 : 2 : 4.

5. Внатрешните агли на еден триаголник се во размер 4 : 3 : 5. Пресметај ја големината на внатрешните агли на триаголникот.

6. Мерсиха, Еџе и Теа живеат во изнајмен стан. Тие ја делат станаринатa во размер 1 : 2 : 2, соодветно на големината на собите. Вкупната станарина е 16200 денари за месец. Колку станарина треба да плати секоја од нив?

7. Во едно училиште има четири секции: литературна (л), математичка (м), информатичка (и) и спортска (с). Има двапати повеќе ученици во математичката секција отколку во литературната секција. Има петпати повеќе ученици во информатичката секција отколку во математичката.
Бројот на ученици во информатичката секција е половина од бројот на членови во спортската секција. Секој ученик може да членува најмногу во една секција.
а) Запиши го размерот л : м : и : с.
б) Колку ученици има во секоја од секциите, ако во нив членуваат вкупно 132 ученика.
Упатство: Означи го бројот на ученици во литературната секција со x, а потоа изрази го бројот на ученици во секоја од останатите секции преку x.

8. Студентите Душко, Максим и Марија ги поделиле заработените пари во размер 3 : 4 : 5, соодветно. Душко добил 4500 денари. По колку денари добиле Максим и Марија? Колку е вкупната сума што ја заработиле студентите?

Истражување

Сумата што ја имале Амира, Бобан и Калина била во размер 6 : 5 : 4, соодветно. Откако едно од девојчињата му позајмило 20 денари на Бобан, сумите биле во размер 5 : 6 : 4.
а) Колку пари имал секој од нив пред позајмувањето?
б) Дали е можно Калина да му позајмила на Бобан? Образложи го одговорот.

11. ПРОПОРЦИОНАЛНИ ВЕЛИЧИНИ

Правопропорционални величини

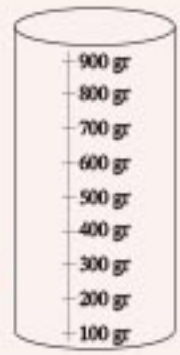
Активност

За подготовка на 3 леба пекарот потрошил 720 грама брашно.

а) Колку брашно ќе му треба за 6 леба, а колку за 9 леба?

б) Како се менува потребното количество брашно со зголемувањето на бројот на лебови, а како со намалувањето на бројот на лебови?





За две величини велиме дека се **правопропорционални** ако со зголемување на една величина се зголемува и другата величина во истиот сооднос.

Со други зборови, две величини се правопропорционални, ако колку пати се зголемува едната величина толку пати се зголемува и другата величина, односно колку пати се намалува едната величина толку пати се намалува и другата величина.

Пример 1

Две тетратки чинат 160 денари.

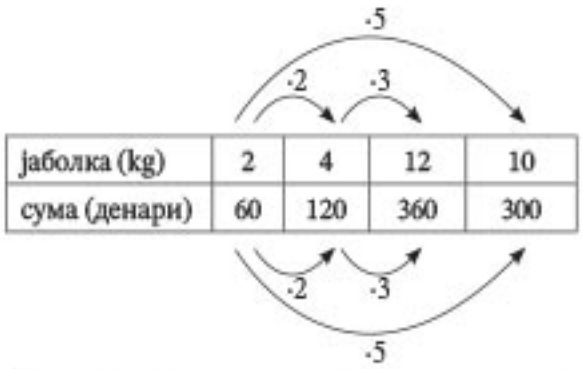
а) Ако купиме три пати повеќе тетратки, колку пари ќе платиме?

б) Каква е врската меѓу величините број на тетратки и пари што треба да ги платиме за тетратките?

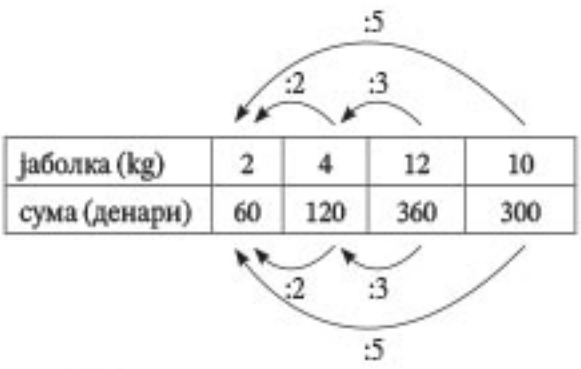
а) Ако купиме три пати повеќе тетратки ќе платиме три пати повеќе. Три пати повеќе тетратки се 6 тетратки. За нив ќе платиме три пати повеќе, односно
$3 \cdot 160 = 480$ денари.

б) Величините број на тетратки и пари што треба да ги платиме за тетратките се правопропорционални, бидејќи со зголемување на една величина се зголемува и другата величина во истиот сооднос.

Во табелите, количеството на купени јаболка е дадено во килограми, а сумата што треба да ја платиме за количеството купени јаболка е изразена во денари.



јаболка (kg)	2	4	12	10
сума (денари)	60	120	360	300



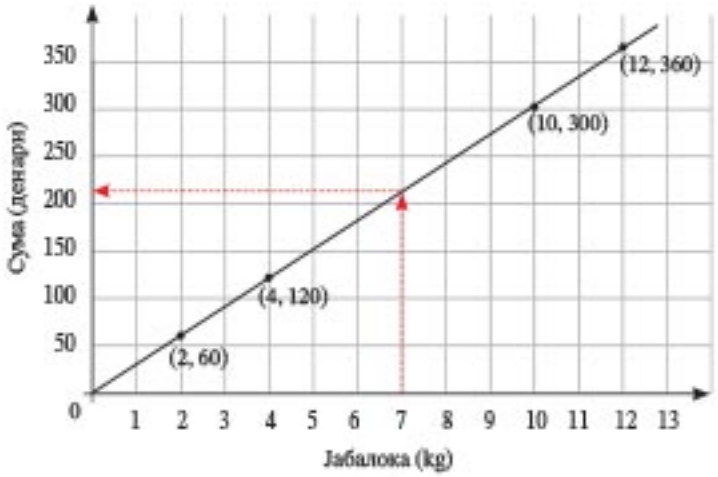
јаболка (kg)	2	4	12	10
сума (денари)	60	120	360	300

Количеството на купени јаболка и цената на чинење на јаболката се правопропорционални величини.

Да забележиме дека соодветните количници од сумата на пари што треба да ја платиме и количеството на купени јаболка

$60 : 2 = 120 : 4 = 360 : 12 = 30,$

е секогаш ист број кој ја определува цената на килограм јаболка. Ако добиените вредности ги прикажеме како точки во координатната рамнина (црт. 1) ќе добиеме **права низ координатниот почеток**.



црт. 1

Во нашиот пример имаме само величини кои не се негативни. Затоа графикот е полуправа со почеток во координатниот почеток.

Со помош на табелата или графикот можеме да пресметаме и вредности кои не се прикажани со нив.

Според табелата можеме да пресметаме дека:

за 510 денари ќе купиме $510 : 30 = 17$ kg јаболка, или

за 17 kg јаболка треба да платиме $17 \cdot 30 = 510$ денари.

Од графикот можеме да најдеме дека:

за 7 kg јаболка треба да платиме 210 денари, или

за 210 денари ќе купиме 7 kg јаболка.

Пример 2

Ако 3 kg авокадо чинат 810 денари, колку денари ќе чинат 7 kg авокадо?

Ако 3 kg авокадо чинат 810 денари, можеме да пресметаме дека:
1 kg авокадо чини $810 : 3 = 270$ денари,
7 kg авокадо ќе чинат $7 \cdot 270 = 1890$ денари.

Задача 1

Линдита за 15 min пеш поминува 1 km. Колку километри ќе помине за: а) 1 h, б) 2,5 h?

Пример 3

За бојадисување на 3 m² ѕид во зелена боја потребни се 600 ml жолта и 21 ml сина боја.
а) Колку милилитри од секоја од боите е потребна за бојадисување на 12 m² од ѕидот?
б) Колку квадратни метри може да се обојат со 0,828 *l* зелена боја?

а) Ако за 3 m² ѕид во зелена боја потребни се 600 ml жолта боја и 21 ml сина боја, тогаш за 12 m² ќе бидат потребни
$4 \cdot 600 = 2\,400$ ml жолта боја и $4 \cdot 21 = 84$ ml сина боја.
б) Ако за 3 m² ѕид во зелена боја потребни се 600 ml жолта боја и 21 ml сина боја, тогаш за 1 m² ќе бидат потребни
$600 : 3 = 200$ ml жолта боја и $21 : 3 = 7$ ml сина боја.
Со 207 ml = 0,207 *l* зелена боја може да се бојадиса 1 m². Бидејќи $0,828 : 0,207 = 4$ заклучуваме дека со 0,828 *l* зелена боја може да се бојадисаат 4 m².

Задача 2

Кројачот Емин шие 4 костуми за 16 дена.
а) Колку дена ќе му требаат за да сошие 12 костуми?
б) Колку костуми ќе сошие за 64 дена?

Обратнопропорционални величини

Активност

Во едно училиште има вкупно 36 ученици од осмо одделение. Тие сакаат да одат на екскурзија и треба да изнајмат автобус. Се одлучиле за понуда каде што дневното изнајмување автобус е 36 000 денари.
Колку би чинело возењето по ученик, ако сите одат на екскурзија? Дали цената на возењето по ученик ќе се намали или зголеми, ако 12 деца не можат да одат на екскурзија?

За две величини велиме дека се **обратнопропорционални**, ако со зголемување на една величина се намалува другата величина во истиот сооднос.

Со други зборови, две величини се обратнопропорционални, ако колку пати се зголемува едната величина толку пати се намалува другата величина, односно колку пати се намалува едната величина толку пати се зголемува другата величина.

Пример 4

Извидниците треба да донесат 10 мали трупци во нивниот камп.

а) Ако повеќе извидници се пријават за задачата, дали секој извидник ќе носи повеќе или помалку трупци?

б) Ако помалку извидници се пријават за задачата, дали секој извидник ќе носи повеќе или помалку трупци во кампот?

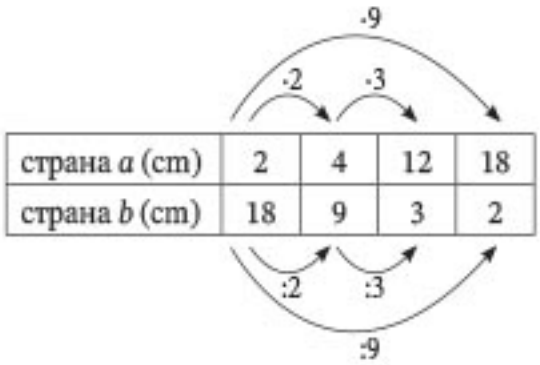
в) Дали бројот на извидници е обратнопропорционален на бројот на трупци што ќе ги носат?

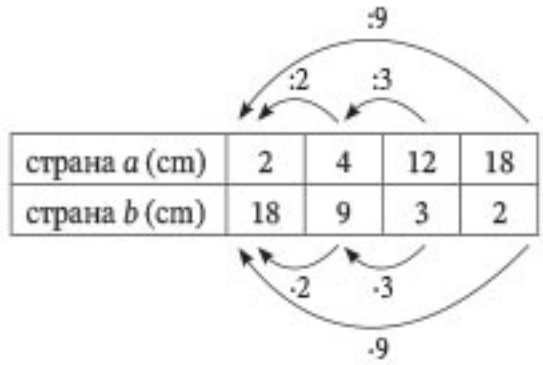
а) Ако повеќе извидници се пријават на задачата, секој ќе носи помал број трупци.

б) Ако помалку извидници се пријават на задачата, секој извидник ќе носи повеќе трупци.

в) Бројот на извидници и бројот на трупци по извидник се обратнопропорционални величини.

Во табелите се дадени должините на страните a и b во центиметри, на неколку правоаголници со плоштина 36 cm².





Колку пати се намалува едната страна, толку пати се зголемува другата страна, и обратно, а плоштината останува непроменета. Соодветните производи

$2 \cdot 18 = 4 \cdot 9 = 12 \cdot 3 = 18 \cdot 2 = 36,$

секогаш ја даваат плоштината на правоаголникот.

Со помош на табелата можеме да ги пресметаме должините на страните a и b, за вредности кои не се прикажани во неа:

ако должината на страната a е 9 cm, тогаш должината на страната b е $36 : 9 = 4$ cm, или

ако должината на страната b е 4 cm, тогаш должината на страната a е $36 : 4 = 9$ cm.

Пример 5

Ако 24 работници работат една работа за 16 дена, за колку дена ќе ја сработат истата работа:
а) 6 работници, б) 48 работници?

а) 6 работници се 4 пати помалку работници. Тие ќе ја сработат работата за 4 пати повеќе дена:
$4 \cdot 16 = 64$ дена.
б) 48 работници се 2 пати повеќе работници, па ќе ја сработат работата за 2 пати помалку дена:
$16 : 2 = 8$ дена.
Забележи дека $24 \cdot 16 = 6 \cdot 64 = 48 \cdot 8 = 384$.

Задача 3

Кофа со вода од 2 *l* се полни со едно шише за 60 секунди.
Колку време е потребно за да се наполни кофата ако се полни:
а) од две шишиња истовремено, б) од три шишиња истовремено?

Пример 6

За поплочување на тераса потребни се 80 плочки со плоштина 30 cm^2. Колку плочки се потребни за поплочување на терасата со плочки со плоштина 25 cm^2?

Плоштината на терасата изнесува $80 \cdot 30 = 2\,400$ cm^2. За поплочување на терасата со плочки со плоштина 25 cm^2 потребни $2\,400 : 25 = 96$ плочки со плоштина 25 cm^2.

Задача 4

Две компании за чистење станови и канцеларии се рекламираат во истиот рекламен простор. Компанијата „Чисто“ вели дека 4 од нивните работници можат да исчистат еден стан за 5 h, а компанијата „Брзо“ вели дека 6 од нивните работници можат да го исчистат истиот стан за 4 h. Под претпоставка дека станот ќе биде подеднакво чист, која компанија е поефикасна?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Кои од следните величини се правопропорционални:
   а) Бројот на кифлички и брашното употребено за да се подготват кифличките?
   б) Брзината на автомобилот и времето потребно за да помине одредено растојание?
   в) Бројот на момчиња што делат одредена сума и сумата што ќе ја добие секое момче?
   г) Сумата што ја плаќаме за сладолед и бројот на топки што можеме да ги добиеме за таа сума?

2. Екрем трча 100 m за време од 20 s.
   а) Ако трча со исто темпо, колку време му е потребно да истрча: 200 m, 300 m и 400 m?
   б) Направи табела во која ќе ги внесеш дадените и добиените вредности за должината на патеката и времето на трчање.
   в) Нацртај го графикот за да ја илустрираш зависноста на времето на трчање од должината на патеката.
   г) Според табелата и графикот утврди колку метри ќе истрча за 30 s?

3. Еден автомобил троши 25 l гориво за да измине 355 km. Колкав пат може да измине автомобилот со 42 l гориво?

4. За бојадисување на ѕид со површина 42 m^2 потребно е 6 l боја. Колку литри боја е потребно за 63 m^2?

5. На шише со течно ѓубриво за цвеќе пишува дека на 10 l вода треба да се стават 20 ml од ѓубривото.
   а) Запиши го размерот во кој се раствора ѓубривото во однос на водата,
   б) Кантата за полевање цвеќе на баба Зора собира 4 литри. Колку милилитри ѓубриво треба да стави баба Зора во кантата за полевање?

6. Кои од следните величини се правопропорционални, а кои се обратнопропорционални:
   а) Бројот на работници и времето за кое тие извршуваат определена работа?
   б) Цената на стоката и количеството стока што може да се купи за определена сума?
   в) Должините на страните на правоаголник со плоштина 1 cm^2?

7. а) Прецртај ја и пополни ја табелата, ако величините x и y се обратнопропорционални:

x	1	2	3	4
y		6		

   б) Според табелата утврди ја соодветната вредност на x за $y = 1$.

8. Една боца полни резервоар со медицински кислород за 50 min при ист проток. Колку време е потребно за да се наполни резервоарот:
   а) со 2 боци, б) со 5 боци, в) со 10 боци?

9. Родителите купуваат плочки за кујната. Ако земат квадратни плочки со страна 50 cm, ќе им требаат 36 плочки. Мајката претпочита помали плочки, исто така квадратни, но со страна 30 cm.
   а) Колку парчиња од помалите плочки ќе им требаат?
   б) Ако поголемите плочки чинат 70 денари по парче, а помалите 30 денари по парче, за кои плочки ќе платат повеќе?

10. **Проектна задача**
    Со употреба на правопропорционални и обратнопропорционални зависности ќе ја согледаш примената на математиката во природните науки.
    1) Биологија
       Измери го бројот на отчукувања на твоето срце (на зглобот или на вратот) по 10 s, 30 s и 60 s.
       а) Како бројот на отчукувања на срцето зависи од времето на мерење?

б) Состави табела и нацртај го графикот на зависноста на бројот на отчукувања на срцето од времето на мерење.

в) Според графикот утврди колкав е бројот на отчукувања по 120 s.

2) Географија

Избери една локација. Во три различни временски термини (на пример, во 10 часот, во 11 часот и во 12 часот) измери го времето додека поминат точно 30 пешаци. Потоа, пресметај го протокот на пешаци (количник од 30 со времето за кое поминале 30 пешаци).

а) Каква е зависноста на времето од протокот на пешаци, правопропорционална или обратнопропорционална?

б) Состави табела на зависноста на времето од протокот на пешаци.

в) Според табелата утврди за колку минути ќе поминат 30 пешаци, ако протокот е 12 пешаци во минута?

3) Физика

Избери три патеки во твојот училишен двор. Измери ја нивната должина и времето што ти е потребно да ја изминеш секоја патека, со иста брзина.

а) Каква е зависноста на времето од должината на патеката, ако се движиш со иста брзина?

б) Состави табела и нацртај го графикот на зависноста на времето од должината на патеката.

в) Според графикот утврди колку време ќе ти биде потребно да изминеш патека долга 20 m.

4) Хемија

Наполни две чаши со 100 ml и 300 ml вода, соодветно. Последователно, во секоја чаша стави зрно грозје и додавај по половина лажичка сол и промешај, се додека да исплива зрното грозје.

Запиши колку сол додаде во секоја чаша.

а) Каква е зависноста на количеството додадена сол од количеството вода?

б) Состави табела и нацртај го графикот на зависноста на количеството додадена сол од количеството вода.

в) Според графикот утврди колку количество сол треба да додадеш во 400 ml вода за да исплива зрното грозје?

12. СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Собирање рационални броеви

Активност

Еден велосипедист првиот час поминал $\frac{3}{4}$ од патеката, а вториот час поминал $\frac{1}{6}$ од патеката. За да пресметаш колкав дел од патеката поминал велосипедистот за 2 h, запиши изрази со дропки што одговараат на обоените делови на цртеж 1.



црт. 1

Објасни ги чекорите со кои го пресмета делот од патеката што го поминал велосипедистот за 2 h.

Скенирај го кодот и потсети се како се собираат дропки.

Пример 1

Пресметај го збирот на рационалните броеви: а) $\frac{2}{5}$ и $\frac{-4}{5}$, б) $\frac{5}{6}$ и $\frac{-3}{8}$.

а) Рационалните броеви се дропки со еднакви именители:

$$\frac{2}{5}+\frac{-4}{5}=\frac{2+(-4)}{5}=\frac{-2}{5}.$$

Збирот од броителите на дропките го запишуваме како броител на дропката-збир, а именителот е еднаков на именителите на дропките.

б) Рационалните броеви се дропки со различни именители:

$$\frac{5}{6}+\frac{-3}{8}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}+\frac{(-3)\cdot 3}{8\cdot 3}$$

НЗС (6, 8) = 24, 24 : 6 = 4, 24 : 8 = 3.

$$=\frac{20}{24}+\frac{-9}{24}=\frac{20+(-9)}{24}=\frac{11}{24}.$$

Дропките ги сведуваме на дропки со еднакви именители, а потоа ги собираме како дропки со еднакви именители.

- **Дропки со еднакви именители се собираат** така што збирот од броителите се запишува како броител на дропката-збир, а именителот е еднаков со именителите на дропките.
- **Дропки со различни именители се собираат** така што прво се сведуваат на еднакви именители, а потоа се собираат како дропки со еднакви именители.

Пример 2

Пресметај го збирот на рационалните броеви: а) $-3\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, б) $-7{,}5$ и $3{,}67$.

а) $-3\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{-7}{2}+\frac{1}{4}=\frac{-7\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{1\cdot 1}{4\cdot 1}=$

$=\frac{-14}{4}+\frac{1}{4}=\frac{-14+1}{4}=\frac{-13}{4}=-3\frac{1}{4}$,

Мешаните броеви ги запишуваме во неправилни дропки.

б) $-7{,}5+3{,}67=\frac{-75}{10}+\frac{367}{100}=\frac{-75\cdot 10}{10\cdot 10}+\frac{367}{100}$

$=\frac{-750}{100}+\frac{367}{100}=\frac{-750+367}{100}=-3\frac{83}{100}$.

Децималните броеви ги запишуваме како децимални дропки.

Задача 1

Пресметај: а) $\frac{4}{9}+\frac{-5}{12}$, б) $\frac{-3}{5}+\frac{-7}{15}$, в) $\frac{-10}{11}+2\frac{7}{10}$, г) $-0{,}54+(-8{,}8)$.

Задача 2

Нуркач се наоѓал на длабочина од 12,5 m под површината на морето. Потоа, тој се искачил за $2\frac{3}{5}$ m.

а) На која длабочина се нашол нуркачот?

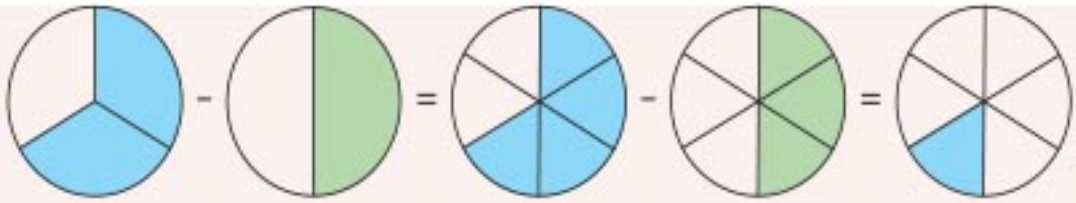
б) Дали е поблиску или подалеку од површината на морето?

Одземање рационални броеви

Активност

Столарот Бесим од штица долга $\frac{2}{3}$ m отсекол парче долго $\frac{1}{2}$ m.

За да пресметаш колкав дел од штицата му преостанал, запиши изрази со дропки кои одговараат на обоените делови на цртеж 2.



црт. 2

Пример 3

Пресметај ја разликата: а) $\frac{-3}{7}-\frac{2}{7}$, б) $\frac{-3}{8}-\frac{5}{6}$.

а) Рационалните броеви се дропки со еднакви именители:

$\frac{-3}{7}-\frac{2}{7}=\frac{-3-2}{7}=\frac{-5}{7}$.

Разликата од броителите во редослед ја запишуваме како броител на дропката-разлика, а именителот е еднаков на именителите на дропките.

б) Рационалните броеви се дропки со различни именители:

$\frac{-3}{8}-\frac{5}{6}=\frac{-3\cdot 3}{8\cdot 3}-\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}$

НЗС (8, 6) = 24, 24 : 8 = 3, 24 : 6 = 4.

$=\frac{-9}{24}-\frac{20}{24}=\frac{-9-20}{24}=\frac{-29}{24}=-1\frac{5}{24}$.

Дропките се сведуваат на дропки со еднакви именители, а потоа се одземаат како дропки со еднакви именители.

- **Дропки со еднакви именители се одземаат** така што разликата од броителите во редослед ја запишуваме како броител на дропката-разлика, а именителот е еднаков на именителите на дропките.
- **Дропки со различни именители се одземаат** така што прво дропките се сведуваат на дропки со еднакви именители, а потоа се одземаат како дропки со еднакви именители.

Пример 4

Пресметај ја разликата: а) $2\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$, б) $-2{,}5-3{,}75$, в) $-2\frac{1}{4}-1\frac{5}{7}$, г) $-2{,}5-3{,}75$.

а) $2\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{11}{4}-\frac{1}{3}=\frac{11\cdot 3}{4\cdot 3}-\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{33}{12}-\frac{4}{12}=\frac{33-4}{12}=\frac{29}{12}=2\frac{5}{12}$,

б) $-\frac{3}{5}-\frac{-4}{9}=\frac{-3\cdot 9}{5\cdot 9}-\frac{-4\cdot 5}{9\cdot 5}=\frac{-27}{45}-\frac{-20}{45}=\frac{-27-(-20)}{45}=\frac{-7}{45}=-\frac{7}{45}$,

в) $-2\frac{1}{4}-1\frac{5}{7}=\frac{-9}{4}-\frac{12}{7}=\frac{-9\cdot 7}{4\cdot 7}-\frac{-12\cdot 4}{7\cdot 4}=\frac{-63}{28}-\frac{-48}{28}=\frac{-63-(-48)}{28}=\frac{-15}{28}=-1\frac{11}{28}$,

г) $-2{,}5-3{,}75=\frac{-25}{10}-\frac{375}{100}=\frac{-25\cdot 10}{10\cdot 10}-\frac{375}{100}=\frac{-250-375}{100}=\frac{-625}{100}=\frac{-25}{4}=-6\frac{1}{4}$.

Задача 3

Пресметај: а) $\frac{7}{16}-\frac{-5}{12}$, б) $\frac{-8}{15}-\frac{-6}{21}$, в) $-1\frac{5}{7}-3\frac{3}{4}$, г) $-12{,}54-15{,}2$.

Задача 4

Во еден зимски ден температурата наутро во Берово била $-\frac{5}{2}$ °C. До пладне температурата се покачила за $3\frac{1}{4}$ °C. Попладне, пак, се намалила за 2,6 °C.

а) Колкава била температурата на пладне?

б) Колкава била температурата попладне?

в) Дали попладневната температура е повисока или пониска од утринската и за колку степени?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај: а) $\frac{-1}{6}+\frac{-3}{8}$, б) $-13\frac{2}{3}+10\frac{1}{4}$, в) $-17+1\frac{5}{6}$, г) $-1{,}55+0{,}7$.
2. Пресметај: а) $\frac{1}{5}-\frac{3}{8}$, б) $-1\frac{2}{7}-\frac{1}{9}$, в) $-1-1\frac{5}{7}$, г) $-0{,}17-1{,}325$.
3. Ана и Ерол отишле во продавница да купат овошје. Ана купила $\frac{3}{4}$ kg јаболка, $\frac{2}{3}$ kg круши. Ерол купил 2,4 kg портокали и 1,35 kg мандарини.
   а) Колку килограми овошје купила Ана?
   б) Колку килограми овошје купил Ерол?
   в) Кој купил повеќе овошје и за колку килограми?
4. Во голема чаша имало 2,5 l вода. Испариле $\frac{2}{5}$ l при загревање, а потоа биле додадени 1,1 l свежа вода. Колкава е вкупната количина на вода во чашата?
5. Температурата на раствор била −2,3 °C. Потоа се зголемила за $5\frac{3}{5}$ °C, па се намалила за 3,2 °C. Колкава е температурата по промените?
6. Растението на почетокот е високо $8\frac{2}{5}$ cm. Во текот на една недела пораснало за 2,3 cm, а потоа дел од стеблото се скратило за 0,9 cm поради слаб раст. Колкава е висината на растението сега? Колку треба да порасне за да достигне висина од 12 cm?
7. Марина меша чај во бокал. На почеток имало $1\frac{4}{5}$ l чај. Испариле 0,4 l при загревање, а потоа додала 0,75 l свеж чај.
   а) Колкава е вкупната количина на чај по сите промени?
   б) Ако сака да има 3 l чај, уште колку литри треба да додаде?
8. Јована има негативно салдо од 450 денари. На својата сметка уплатила $31\frac{1}{4}$ денари.
   а) Колкава ќе биде состојбата на сметката?
   б) Ако потроши уште 125,75 денари, колкава ќе биде крајната состојба на сметката?

9. Елена за викендот играла три сета тенис. Во првиот сет имала резултат полош за $1\frac{1}{5}$ поени во однос на противничката. Во вториот сет освоила 2,3 поени повеќе од противничката. И во третиот сет имала резултат полош за $1\frac{1}{5}$ поени во однос на противничката.

а) Колкав е вкупниот резултат на Елена во однос на противничката по сите три сета?

б) Дали вкупно освоила повеќе или помалку поени од противничката?

Истражување

Ако ги исполниш барањата во истражувањето ќе научиш да собираш и одземаш рационални броеви во децимален облик, без да ги претвораш децималните броеви во децимални дропки.

а) Познато ти е дека при собирање на цели броеви важи правилото:

- **Збир на два цели броја со исти знаци** е цел број чија апсолутна вредност е збир од апсолутните вредности на двата броја (како збир на природни броеви), со ист знак како знаците на собироците.
- **Збир на два различни броја со различни знаци** е цел број чија апсолутна вредност е еднаква на разликата од поголемата со помалата апсолутна вредност на тие два броја, а неговиот знак е еднаков на знакот на бројот со поголемата апсолутна вредност.
- **Разлика на два цели број**а се добива кога на намаленикот ќе се додаде спротивниот број на намалителот.

Слично како кај целите броеви, може да дефинираме **апсолутна вредност на рационален број** x на следниот начин:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ако } x \text{ е позитивен рационален број} \\ 0, & \text{ако } x=0 \\ -x, & \text{ако } x \text{ е негативен рационален број} \end{cases}.$$

Следејќи го правилото за собирање и одземање на цели броеви, изведи правило за собирање на рационални броеви во децимален облик.

б) Со помош на правилото пресметај: $1{,}2 + 0{,}5$; $-1{,}2 + (-0{,}5)$; $-1{,}2 + 0{,}5$; $1{,}2 + (-0{,}5)$.

Скенирај ги кодовите и реши ги задачите.

Собирање цели броеви

Одземање цели броеви

Одземање децимални броеви

13. МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

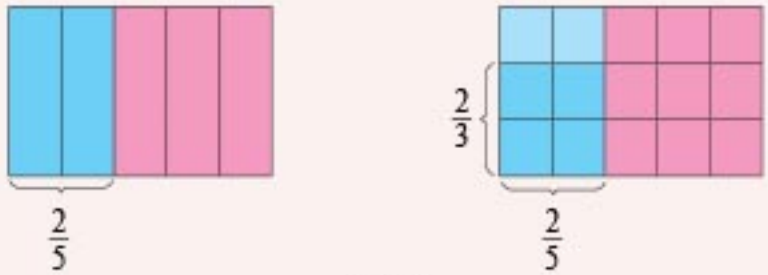
Множење рационални броеви

Активност

Демир земал $\frac{2}{5}$ од своите сликички и отишол кај својот другар Михаил. Од сликичките што ги земал, Демир му дал на Михаил $\frac{2}{3}$ (црт. 1).

а) Колкав дел од сликичките Демир му дал на Михаил?

б) Која операција ја примени за да пресметаш?



црт. 1

Скенирај го кодот и потсети се како се множат дропки.

Пример 1

Пресметај го производот на рационалните броеви: а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{7}$, б) $\frac{-2}{3}$ и $\frac{5}{7}$.

а) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot5}{3\cdot7}=\frac{10}{21}$, б) $\frac{-2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{(-2)\cdot5}{3\cdot7}=\frac{-10}{21}$.

Производ на дропки е дропка чиј броител е еднаков на производот од броителите на множителите, а именителот е производ од именителите на множителите.

Пример 2

Пресметај го производот $\frac{-10}{21}\cdot\frac{14}{25}$.

Прв начин: $\frac{-10}{21}\cdot\frac{14}{25}=\frac{-10\cdot14}{21\cdot25}=\frac{-140}{525}=\frac{-28}{105}=\frac{-4}{15}$. Пресметуваме, па скратуваме.

Втор начин: $\frac{-\cancel{10}}{\cancel{21}} \cdot \frac{\cancel{14}}{\cancel{25}} = \frac{-2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{-4}{15}$. Скратуваме, па пресметуваме.

Пример 3

Пресметај го производот: а) $-1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{3}$, б) $-2{,}4 \cdot (-1{,}7)$.

а) $-1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{3} = -\frac{7}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{-7}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{-7 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{-49}{15} = -3\frac{4}{15}$,

б) $-2{,}4 \cdot (-1{,}7) = \frac{-24}{10} \cdot \frac{-17}{10} = \frac{-24 \cdot (-17)}{10 \cdot 10} = \frac{408}{100} = \frac{102}{25} = 4\frac{2}{25}$.

Задача 1

Пресметај го производот: а) $\frac{-105}{72} \cdot \frac{18}{15}$, б) $1\frac{8}{11} \cdot \frac{-33}{45}$, в) $\frac{-7}{17} \cdot \frac{-1}{10}$, г) $-0{,}4 \cdot 1{,}5$.

Пример 4

Температурата во еден ладилник била 2,5 °C. Потоа таа се зголемила за 1,4 пати од почетната температура.

а) За колку Целзиусови степени се зголемила температурата во ладилникот?

б) Колкава била новата температура во ладилникот?

а) Температурата се зголемила за: $2{,}5 \cdot 1{,}4 = \frac{25}{10} \cdot \frac{14}{10} = \frac{350}{100} = 3{,}5$ °C.

б) Новата температура во ладилникот изнесувала: $2{,}5 + 3{,}5 = \frac{25}{10} + \frac{35}{10} = \frac{60}{10} = 6$ °C.

Задача 2

Јована има заштеда од 312,5 денари. Таа решава да ја зголеми својата заштеда $1\frac{2}{3}$ пати, а потоа да потроши $\frac{3}{4}$ од новата сума за купување книги.

Колку денари ќе ѝ останат на Јована по купувањето на книгите?

Делење рационални броеви

Активност

Три литри вода треба да се поделат во шишенца од половина литар.

а) Колку шишенца ќе бидат потребни?

б) Која операција ќе ја примениш за да пресметаш?

Скенирај го кодот и потсети се како се делат цели броеви.

Пример 5

Пресметај го производот: а) $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}$, б) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}$. Што забележуваш?

а) $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{3\cdot4}{4\cdot3}=\frac{12}{12}=1$, б) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{3\cdot5}{5\cdot3}=\frac{15}{15}=1$.

Сигурно забележа дека броителот на првата дропка е еднаков со именителот на втората дропка и именителот на првата дропка е еднаков со броителот на втората дропка. Ваквите дропки ги нарекуваме **реципрочни дропки**.

Пример 6

Пресметај го количникот: а) $\frac{3}{4}:\frac{7}{11}$, б) $\frac{-5}{9}:\frac{3}{4}$, в) $\frac{-12}{21}:\frac{2}{-7}$.

а) $\frac{3}{4}:\frac{7}{11}=\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{7}=\frac{3\cdot11}{4\cdot7}=\frac{33}{28}=1\frac{5}{28}$ Реципрочна дропка на дропката $\frac{7}{11}$ е дропката $\frac{11}{7}$.

б) $\frac{-5}{9}:\frac{3}{4}=\frac{-5}{9}\cdot\frac{4}{3}=\frac{-5\cdot4}{9\cdot3}=\frac{-20}{27}$ Реципрочна дропка на дропката $\frac{3}{4}$ е дропката $\frac{4}{3}$.

в) $\frac{-12}{21}:\frac{2}{-7}=\frac{-\cancel{12}}{\cancel{21}}\cdot\frac{-\cancel{7}}{\cancel{2}}=\frac{-\cancel{6}\cdot(-1)}{\cancel{3}\cdot1}=2$ Реципрочна дропка на дропката $\frac{2}{-7}$ е дропката $\frac{-7}{2}$.

Количникот на две дропки е еднаков на производот од деленикот и реципрочната дропка на делителот.

Пример 7

Пресметај го количникот: а) $-1\frac{1}{27}:2\frac{2}{9}$, б) $-1{,}2:(-2{,}3)$.

а) $-1\frac{1}{27}:2\frac{2}{9}=-\frac{28}{27}:\frac{20}{9}=\frac{-\cancel{28}}{\cancel{27}}\cdot\frac{\cancel{9}}{\cancel{20}}=\frac{-7}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{-7\cdot1}{3\cdot5}=\frac{-7}{15}$

б) $-1{,}2:(-2{,}3)=\frac{-12}{10}:\frac{-23}{10}=\frac{-12}{\cancel{10}}\cdot\frac{-\cancel{10}}{23}=\frac{12}{23}$

Задача 3

Пресметај го количникот:

а) $\frac{-8}{5}:\frac{2}{3}$, б) $\frac{18}{25}:\frac{-72}{75}$, в) $\frac{-125}{64}:\frac{-50}{16}$.

Скенирај го кодот и реши ги задачите.

Пример 8

Антонија сака да подготви сок за своите пријатели. Едно шише концентрат за сок има 0,7 *l*. Колку шишиња со концентрат за сок ѝ се потребни за да добие 3,5 *l* сок?

Бројот на потребни шишиња изнесува:

$$3,5:0,7=\frac{35}{10}:\frac{7}{10}=\frac{\cancel{35}}{\cancel{10}}\cdot\frac{\cancel{10}}{\cancel{7}}=5.$$

На Антонија ѝ се потребни 5 шишиња со концентрат за сок.

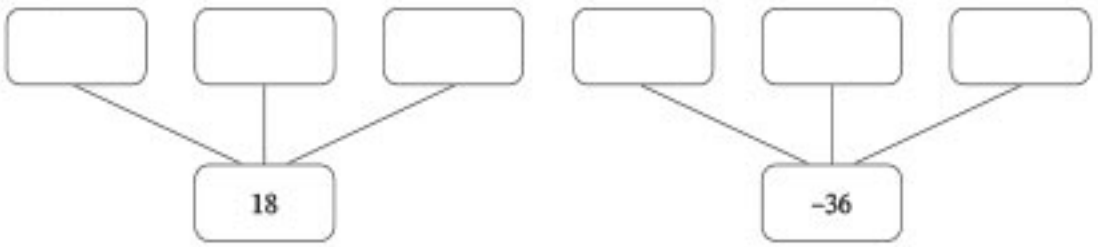
Задача 4

Компанија, која извезува на странскиот пазар, има долг од 825,75 евра. За да го намали, раководството планира да го исплати долгот на 15 еднакви рати. По отплаќањето на првата рата, компанијата остварува добивка од 312,50 евра. Колкав ќе биде долгот на компанијата по плаќањето на првата рата и додавањето на добивката?

Забелешка. Во множеството рационални броеви операцијата делење е секогаш изводлива, освен во случај кога делителот е 0.
Запомни, **со нула не се дели**.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај го производот: а) $-15\cdot\frac{-8}{5}$, б) $-\frac{5}{2}\cdot\frac{-7}{5}$, в) $-8\frac{1}{2}\cdot 36$, г) $(-0,5)\cdot(-0,12)$.
2. Пресметај го количникот: а) $12:\frac{-8}{9}$, б) $5\frac{1}{3}:\left(-5\frac{1}{3}\right)$, в) $3,4:\left(-1\frac{7}{10}\right)$, г) $-230:2,3$.
3. Прецртај ги дијаграмите на цртеж 2 во твојата тетратка. Во празните полиња запиши претставување на дадениот број преку собирање, одземање, множење и делење на рационални броеви.



црт. 2

4. Најниската забележана температура во една област е −18,4 °C. Поради климатски промени таа станала 1,6 пати од почетната. Потоа, за време на топлотен бран се зголемила за 12,5 °C. Колкава е новата температура?
5. Во училницата по физика, Теута поставува два термометри во два различни ладилници за експеримент. Ладилник А има температура од −3,2 °C, а ладилник Б има температура од 2,5 °C. Таа одлучува да постигне температура во ладилникот А, која ќе биде 1,5 пати од почетната, и температура во ладилникот Б која ќе биде 2,4 пати од почетната.

а) Колкава ќе биде новата температура во ладилник А?
б) Колкава ќе биде новата температура во ладилник Б?

6. Сметка А е во минус −4,5 илјади денари. Банката наплаќа камата и состојбата се дели со 0,5. Сметка Б е во плус 7,2 илјади денари, но трошоци ја намалуваат 1,8 пати (се дели со 1,8).
а) Колкава е новата состојба на сметка А?
б) Колкава е новата состојба на сметка Б?
в) Ако се спојат двете сметки во нова сметка, дали состојбата ќе биде позитивна или негативна?

7. Една екипа треба да постави 1177,5 m оптички кабел долж улица. Планот е кабелот да се постави во 15 еднакви делници. По поставувањето на кабелот на првата делница, пристигнала втора екипа која веднаш поставила 312,5 m кабел.
а) Колку изнесува должината на една делница?
б) Колку кабел останал за поставување по првата делница пред вклучувањето на втората екипа?
в) Колку кабел останал да се постави по вклучувањето на втората екипа?

8. Во еден лабораториски експеримент се користи 256,5 g раствор од киселина. Количината треба да се подели на 12 еднакви примероци за учениците.
а) Колкава маса од растворот на киселина има во секој примерок?
б) Ако секој ученик додаде по 15,25 g киселина во својот примерок, колкава ќе биде вкупната маса на примерокот по додавањето?
в) Како ќе се промени концентрацијата на киселината во примерокот по додавањето? Образложи го одговорот.

Истражување

1. а) Препиши ја и пополни ја табелата, во врска со знакот на производот и количникот на два рационални броја a и b.
б) Дали табелата ќе биде идентична на дадената, ако a и b се цели броеви. Зошто?
в) Што можеш да заклучиш, во кој случај знакот е позитивен, а во кој случај е негативен?

a	b	$a \cdot b$	$a : b$
+	+		
+	−		
−	+		
−	−		

2. Ако ги исполниш барањата во истражувањето ќе научиш да множиш и делиш рационални броеви во децимален облик, без да ги претвораш децималните броеви во децимални дропки.
а) Познато ти е дека при множење и делење на цели броеви важи правилото:
- **Производот** на два цели броја со различни знаци е негативен број со апсолутна вредност еднаква на производот од апсолутни вредности на множителите.
- **Производот** на два цели броја со исти знаци е позитивен број со апсолутна вредност еднаква на производот од апсолутни вредности на множителите.
- **Количникот** (ако постои) на два цели броја со различни знаци е негативен број со апсолутна вредност еднаква на количникот од апсолутната вредност на деленикот со делителот.

- **Количникот** (ако постои) на два цели броја со исти знаци е позитивен број со апсолутна вредност еднаква на количникот од апсолутната вредност на деленикот со делителот.

Следејќи го правилото за множење и делење на цели броеви, изведи правило за множење и делење на рационални броеви во децимален облик.

б) Со помош на правилото пресметај:

$1{,}2 \cdot 0{,}5;\ -1{,}2 \cdot (-0{,}5);\ -1{,}2 \cdot 0{,}5;\ 1{,}2 \cdot (-0{,}5);\ 1{,}2 : 0{,}5;\ -1{,}2 : (-0{,}5);\ -1{,}2 : 0{,}5;\ 1{,}2 : (-0{,}5).$

14. СВОЈСТВА НА ОПЕРАЦИИТЕ СО РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Активност

Пресметај ги збировите:
а) $7 + (-4)$ и $(-4) + 7$,
б) $[12 + (-8)] + 3$ и $12 + [(-8) + 3]$.
Што забележуваш? Кои својства ги има операцијата собирање на цели броеви?

Скенирај го кодот и пресметај ги збировите

Пример 1

Пресметај ги збировите: а) $\frac{1}{2}+\frac{-3}{4}$ и $\frac{-3}{4}+\frac{1}{2}$, б) $\left(\frac{-1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{-3}{4}$ и $\frac{-1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{-3}{4}\right)$.

а) $\frac{1}{2}+\frac{-3}{4}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{-3}{4}=\frac{2-3}{4}=\frac{-1}{4}$,

$\frac{-3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{-3}{4}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{-3+2}{4}=\frac{-1}{4}$.

Собироците си ги променија местата.

Збирот не се промени.

б) $\left(\frac{-1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{-3}{4}=\frac{-3+4}{6}+\frac{-3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{-3}{4}=\frac{2-9}{12}=\frac{-7}{12}$,

$\frac{-1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{-3}{4}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{8-9}{12}=\frac{-1}{2}+\frac{-1}{12}=\frac{-6-1}{12}=\frac{-7}{12}$.

Начинот на групирање на собироците е променет.

Збирот не се промени.

- **Комутативно својство на собирањето**: Збирот на два рационални броја не се менува ако собироците си ги променат местата.
- **Асоцијативно својство на собирањето**: Збирот на рационални броеви не зависи од начинот на групирање на собироците.

Задача 1

Миле нуркал на −3,7 m надморска висина, а потоа се спуштил уште 2,5 m. Сеад прво го истражувал подводниот свет на −2,5 m надморска висина, а потоа се спуштил уште 3,7 m. Без да пресметуваш утврди дали Миле и Сеад се нашле на иста надморска висина? Образложи го одговорот.

Пример 2

Пресметај: а) $\frac{-3}{7}+0$, б) $\frac{1}{6}+\frac{-1}{6}$.

а) $\frac{-3}{7}+0=\frac{-3}{7}+\frac{0}{7}=\frac{-3+0}{7}=\frac{-3}{7}$, б) $\frac{1}{6}+\frac{-1}{6}=\frac{1+(-1)}{6}=\frac{0}{6}=0$.

Дропките $\frac{1}{6}$ и $\frac{-1}{6}$ се **спротивни** една на друга.

Активност

Пресметај ги производите: а) $40\cdot(-8)$ и $(-8)\cdot 40$, б) $[(-42)\cdot(+5)]\cdot(-8)$ и $(-42)\cdot[(+5)\cdot(-8)]$. Што забележуваш? Кои својства ги има операцијата множење на цели броеви?

Пример 3

Пресметај ги производите: а) $\frac{-2}{5}\cdot\frac{3}{7}$ и $\frac{3}{7}\cdot\frac{-2}{5}$, б) $\left(\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{-3}{5}$ и $\frac{-1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{5}\right)$.

а) $\frac{-2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{-2\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{-6}{35}$, Множителите си ги променија местата.

$\frac{3}{7}\cdot\frac{-2}{5}=\frac{3\cdot(-2)}{7\cdot 5}=\frac{-6}{35}$. Производот не се промени.

б) $\left(\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{-3}{5}=\frac{-1\cdot 1}{3\cdot 4}\cdot\frac{-3}{5}=\frac{-1}{12}\cdot\frac{-\cancel{3}}{5}=\frac{-1}{4}\cdot\frac{-1}{5}=\frac{-1\cdot(-1)}{4\cdot 5}=\frac{1}{20}$, Начинот на групирање на множителите е променет.

$\frac{-1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{5}\right)=\frac{-1}{3}\cdot\frac{1\cdot(-3)}{4\cdot 5}=\frac{-1}{\cancel{3}}\cdot\frac{-\cancel{3}}{20}=\frac{(-1)\cdot(-1)}{20}=\frac{1}{20}$. Производот не се промени.

- **Комутативно својство на множењето**: Производот на два рационални броја не се менува ако множителите си ги променат местата.
- **Асоцијативно својство на множењето**: Производот на рационални броеви не зависи од начинот на групирање на множителите.

Пример 4

Пресметај го производот: а) $\frac{-4}{5}\cdot 1$, б) $\frac{-2}{3}\cdot 0$, в) $\frac{-2}{7}\cdot\frac{7}{-2}$.

а) $\frac{4}{5}\cdot 1=\frac{4\cdot 1}{5\cdot 1}=\frac{4}{5}$, б) $\frac{2}{3}\cdot 0=\frac{2\cdot 0}{3}=\frac{0}{3}=0$, в) $\frac{-2}{7}\cdot\frac{7}{-2}=1$.

Дропките $\frac{-2}{7}$ и $\frac{7}{-2}$ се **реципрочни** една на друга.

Заради асоцијативниот закон за собирањето и множењето, можеме да пресметаме збир или производ на конечно многу рационални броеви.

Задача 2

Пресметај: а) $2\frac{1}{10}+3\frac{2}{15}+\frac{3}{15}$, б) $\frac{3}{7}\cdot\frac{12}{3}\cdot 3\frac{2}{4}$, в) $\left(-3\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{10}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)$.

Активност

Мери решила да штеди од својот дневен џепарлак, така што секој ден ќе троши по 200 денари од џепарлакот, кој дневно изнесува 300 денари. За 7 дена пресметала дека ќе заштеди

$300\cdot 7-200\cdot 7=(300-200)\cdot 7=100\cdot 7=700$ денари.

Кое својство го применила Мери во пресметувањето?

Дистрибутивно својство на множењето во однос на собирањето: При множење на збир со даден број, резултатот е ист ако прво го пресметаме збирот, па потоа го помножиме со дадениот број, или ако секој од собироците прво го помножиме со дадениот број, а потоа ги собереме добиените производи. Дистрибутивното својство на множењето важи и во однос на одземањето.

Задача 3

Провери го дистрибутивното својство преку примерот $\left(1{,}2+\frac{3}{5}-7\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$.

Со примена на наведените својства на операциите собирање и одземање во многу случаи можеме да ги олесниме пресметките.

Пример 5

Пресметај на најлесен начин: а) $7-3\frac{1}{3}+9-5\frac{2}{3}$, б) $-2{,}5\cdot(-37{,}9)\cdot 4$, в) $2{,}52\cdot 36+2{,}52\cdot 64$.

а) $7-3\frac{1}{3}+9-5\frac{2}{3}=7-\frac{10}{3}+9-\frac{17}{3}=7+9-\left(\frac{10}{3}+\frac{17}{3}\right)=16-\frac{27}{3}=16-9=7$,

б) $-2{,}5\cdot(-37{,}9)\cdot 4=\frac{-25}{10}\cdot 4\cdot\frac{-379}{10}=-10\cdot\frac{-379}{10}=379$,

в) $2{,}52\cdot 36+2{,}52\cdot 64=2{,}52\cdot(36+64)=\frac{252}{100}\cdot 100=252$.

Задача 4

Теа купила 3,5 kg јагоди по 55 денари, 3,5 kg цреши по 45 денари и 3,5 kg по 100 денари. Колку денари вкупно платила за овошјето?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Провери го равенството $a+(b+c)=(a+b)+c$ за рационалните броеви:
а) $a=-2\frac{3}{4}$, $b=\frac{-2}{7}$ и $c=\frac{4}{5}$, б) $a=\frac{-1}{2}$, $b=1\frac{2}{3}$ и $c=-0{,}6$.

2. Пресметај $\frac{1}{2}$ од $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{6}$ од $\frac{1}{2}$. Потоа спореди ги добиените резултати. Што заклучи? Објасни го одговорот.

3. Пресметај со примена на комутативното и асоцијативното својство:
а) $3\frac{1}{2}-\frac{5}{12}-\frac{1}{2}+4\frac{7}{12}$, б) $\frac{-3}{8}+12\frac{3}{4}-3\frac{5}{8}+2\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$, в) $\left(\frac{3}{17}\cdot\frac{2}{11}\right)\cdot\frac{17}{18}$, г) $\frac{15}{19}\cdot\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{38}{45}\right)$.

4. Каков производ се добива, поголем од нула, еднаков на нула или помал од нула, ако:
а) бројот на негативните множители е парен и нема множител 0,
б) бројот на негативните множители е непарен и нема множител 0,
в) еден од множителите е нула.

5. Пресметај ги производите на два начина: а) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)$, б) $\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{14}\right)\cdot 1\frac{3}{4}$.

6. Пресметај на најлесен начин: а) $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}$, б) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}$, в) $\frac{11}{12}\cdot\frac{8}{9}-\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}$.

7. Еден базен се полни со три цевки за $3\frac{1}{3}\text{h}$. Првата цевка за еден час испушта $3\frac{1}{5}\text{m}^3$ вода, а втората $1\frac{1}{10}\text{m}^3$ повеќе од првата. Колку кубни метри вода собира базенот ако третата цевка за еден час испушта толку вода колку што заедно испуштаат двете цевки?

15. БРОЈНИ ИЗРАЗИ СО РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Активност

Пресметај ја вредноста на бројниот израз:
а) $(-1)\cdot(-10)+5\cdot(-9):(-1)$,
б) $\{20-3\cdot[8+(-4)]\}:[10+2\cdot(-3)]$.
За секој израз објасни го редоследот на извршување на означените операции.

Скенирај го кодот и реши ги задачите.

Ако во броен израз без загради се сретнуваат само операции од прв ред собирање и одземање, или само операции од втор ред множење и делење, тогаш операциите се извршуваат по редоследот како што се запишани, одлево надесно.

Пример 1

Пресметај ја бројната вредност на изразот: а) $2\frac{3}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-1$, б) $-6\cdot2\frac{1}{2}:(-\frac{3}{4}):2$.

а) $2\frac{3}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-1=\frac{19}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-\frac{1}{1}=\frac{19\cdot6}{8\cdot6}-\frac{5\cdot4}{12\cdot4}+\frac{7\cdot3}{16\cdot3}-\frac{1\cdot48}{1\cdot48}=$

$=\frac{114-20+21-48}{48}=\frac{67}{48}=1\frac{19}{48}$,

б) $-6\cdot2\frac{1}{2}:(-\frac{3}{4}):2=-6\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{-3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{-6\cdot5\cdot4\cdot1}{2\cdot(-3)\cdot2}=\frac{-120}{-12}=10$.

Ако во броен израз без загради се сретнуваат операции од прв ред и втор ред, тогаш прво ги извршуваме операциите од втор ред множење и делење, а потоа операциите од прв ред собирање и одземање.

Пример 2

Пресметај ја бројната вредност на изразот $\frac{5}{8}-1\frac{5}{6}:\frac{11}{15}$.

$\frac{5}{8}-1\frac{5}{6}:\frac{11}{15}=\frac{5}{8}-\frac{\cancel{11}}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{15}}{\cancel{11}}=\frac{5}{8}-\frac{5}{2}=\frac{5}{8}-\frac{5\cdot4}{2\cdot4}=\frac{5-20}{8}=\frac{-15}{8}=-1\frac{7}{8}$.

Ако во бројниот израз се сретнуваат: мали загради ( ), средни загради [ ], и големи загради { }, тогаш прво ќе ги извршуваме операциите во малите загради, потоа операциите во средните, па во големите загради, а на крајот и операциите надвор од нив и со нив.

Пример 3

Пресметај ја бројната вредност на изразот $\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot 2\frac{1}{3}\right\}\cdot 1\frac{1}{5}$.

$$\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot 2\frac{1}{3}\right\}\cdot 1\frac{1}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot\frac{7}{3}\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\left(\frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}\right)\cdot 2\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=$$

$$=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\frac{5+6}{15}\cdot 2\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\frac{22}{15}\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=$$

$$=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7\cdot 5}{15}-\frac{22}{15}\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2+35-22}{15}\right\}\cdot\frac{6}{5}=\frac{15}{15}\cdot\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$$

Задача 1

Пресметај ја бројната вредност на изразот $(-3,5)+\frac{2}{3}\cdot(-4,5)-(-\frac{5}{6})+7,2:(-2,4)$.

Пример 4

Еден ученик прави научен експеримент со раствори на соли. Има три шишиња со различни количини на раствори. Во првото шише има 1,2 l раствор, во второто има $\frac{3}{4}$ l, во третото има 0,6 l раствор. Половина од растворот во првото шише го истурил, во второто шише дотурил $\frac{1}{3}$ од неговата количина, а од третото шише истурил 0,2 l. Колкава е количината раствор што останало во трите шишиња заедно?

Според условите во задачата го добиваме бројниот израз

$$\left(1,2-\frac{1}{2}\cdot 1,2\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+(0,6-0,2).$$

Со пресметување на бројната вредност на изразот добиваме

$$\left(1,2-\frac{1}{2}\cdot 1,2\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+(0,6-0,2)=\left(\frac{12}{10}-\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{10}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{6}{10}-\frac{2}{10}\right)=$$

$$=\left(\frac{12}{10}-\frac{12}{20}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{6-2}{10}\right)=\left(\frac{12\cdot 2}{10\cdot 2}-\frac{12}{20}\right)+\frac{4}{4}+\frac{4}{10}=$$

$$=\frac{24-12}{20}+\frac{4\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{4\cdot 2}{10\cdot 2}=\frac{12}{20}+\frac{20}{20}+\frac{8}{20}=\frac{40}{20}=2.$$

Количината раствор што останала во трите шишиња заедно е 2 l.

Задача 2

За колач се користат $\frac{3}{4}$ чаша шеќер, 0,5 чаша масло и $\frac{1}{3}$ чаша млеко. Додадена е уште 0,2 чаша вода и половина од смесата е ставена во калап. Колку чаши смеса се ставени во калапот?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

а) $8\frac{3}{8}-3\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\left(7\frac{1}{2}-5\frac{1}{4}\right)$, б) $-\frac{7}{8}+4{,}5-\left(1\frac{2}{3}+\frac{-6}{2}\right)\cdot 3$,

в) $\left[\left(3\frac{1}{2}-4\right)\cdot(-1{,}2)-\left(-\frac{7}{10}\right)\right]\cdot 0{,}25$, г) $\left\{-2{,}4+\frac{3}{4}\cdot(-10)-[-1{,}2+(-6)]:0{,}5\right\}+\frac{1}{2}$.

Објасни го редоследот на извршување на операциите.

2. Температурата во една лабораторија била 21,5 °C. Прво се зголемила за 3,2 °C, потоа се намалила за 0,5 °C, а на крај се зголемила уште за 0,1 °C. Колкава е крајната температура?

3. Во еден бокал се стават 1,2 l вода, потоа се додаваат $\frac{3}{10}$ l млеко, а се одземаат 0,25 l од добиената течност. Постапката се повторува два пати. Колку литри вода ќе има на крај во бокалот?

4. Марина подготвува смути со $\frac{2}{3}$ l јогурт, 0,25 l сок и $\frac{1}{10}$ l вода. Смутито го разделила на 3 чаши. Колку течност има во една чаша?

5. Една продавница купила 12,5 kg калинки по цена од 95 денари за килограм. Дополнително платила 235 денари за пакување. Ако продале $\frac{4}{5}$ од калинките по 124 денари за килограм, дали продавницата е во загуба или остварила добивка?
Упатство: Спореди го приходот со делот од трошокот што се однесуваат на продадената количина.

6. Еден автобус на релација Скопје – Ниш троши во просек 2,4 литри дизел на 10 km. Патот е долг 210 km. Цената на 1 литар дизел е 1,65 евра. Автобусот превезува 56 патници. Секој плаќа по 21,20 евра, освен 6 патници кои имаат билет со попуст од 1,50 евра. Колкава е вкупната добивка на турата?

16. ДВОЈНИ ДРОПКИ

Активност

Запиши ги следните количници на цели броеви како дропки.
а) 7 : 9 б) 12 : 5 в) 1 : 4

Количниците $5:\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}:(-7)$, $\frac{5}{3}:\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}:\frac{3}{5}$, $\frac{-3}{8}:4\frac{7}{9}$ и $7\frac{3}{5}:1\frac{4}{9}$ можеме да ги запишеме и како:

$$5:\frac{3}{4}=\frac{5}{\frac{3}{4}},\ \frac{2}{3}:(-7)=\frac{\frac{2}{3}}{-7},\ \frac{5}{3}:\frac{3}{4}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{4}},\ 2\frac{1}{2}:\frac{3}{5}=\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}},\ \frac{-3}{8}:4\frac{7}{9}=\frac{\frac{-3}{8}}{4\frac{7}{9}},\ 7\frac{3}{5}:1\frac{4}{9}=\frac{7\frac{3}{5}}{1\frac{4}{9}}.$$

Ваквите изрази ги нарекуваме двојни дропки.

Дропка на која броителот или именителот е дропка се вика **двојна дропка**.

Дробната црта што го разделува броителот од именителот на двојната дропка се вика **главна дробна црта**.

Пример 1

Запиши ги количниците во вид на двојна дропка:

а) $4:\frac{2}{3}$, б) $\frac{5}{8}:6$, в) $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}$.

а) $4:\frac{2}{3}=\frac{4}{\frac{2}{3}}$, б) $\frac{5}{8}:6=\frac{\frac{5}{8}}{6}$, в) $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}}$.

Задача 1

Претстави ги количниците во вид на двојна дропка:

а) $\frac{3}{5}:\frac{7}{8}$, $\frac{4}{7}:\frac{1}{6}$, $\frac{9}{11}:\frac{12}{-5}$, б) $5:\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}:7$ и $3\frac{1}{5}:7$.

Во двојната дропка $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ броевите a и d се викаат **надворешни членови**, а броевите b и c **внатрешни членови**.



Пример 2

Запиши ги надворешните и внатрешните членови на двојната дропка: а) $\frac{\frac{8}{11}}{6}$, б) $\frac{7}{\frac{-2}{9}}$.

Ако броителот и именителот на двојната дропка е цел број, тогаш со негово претставување како дропка со именител 1, двојната дропка ќе добие полн облик, односно ќе има четири члена.

а) $\frac{\frac{8}{11}}{6}=\frac{\frac{8}{11}}{\frac{6}{1}}$, Надворешни членови се 8 и 1, а внатрешни членови се 11 и 6.

б) $\frac{\frac{7}{1}}{\frac{-2}{9}}$, Надворешни членови се 7 и 9, а внатрешни членови се 1 и –2.

Пример 3

Претвори ја во обична дропка двојната дропка: а) $\frac{\frac{6}{7}}{\frac{5}{4}}$, б) $\frac{\frac{-5}{9}}{\frac{4}{7}}$.

Двојна дропка се претвора во обична дропка кога дропката броител ќе се подели со дропката именител.

а) $\frac{\frac{6}{7}}{\frac{5}{4}} = \frac{6}{7} : \frac{5}{4} = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{24}{35}$,

б) $\frac{\frac{-5}{9}}{\frac{4}{7}} = \frac{\frac{-5}{9}}{\frac{4}{7}} = \frac{(-5) \cdot 7}{9 \cdot 4} = \frac{-35}{36} = -\frac{35}{36}$.

Двојната дропка се претвора во обична дропка така што производот на надворешните членови се запишува за броител, а производот на внатрешните членови за именител на обичната дропка:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Задача 2

Претвори ја во обична дропка двојната дропка: а) $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}$, б) $\frac{-5}{\frac{4}{9}}$, в) $\frac{\frac{3}{8}}{5}$.

Пример 4

Претвори ја во обична дропка двојната дропка: а) $\frac{3\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$, б) $\frac{7,4}{\frac{4}{5}}$.

а) $\frac{3\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$

Мешаните броеви ги запишуваме во неправилни дропки.

б) $\frac{7,4}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{74}{10}}{\frac{4}{5}} = \frac{74 \cdot 5}{10 \cdot 4} = \frac{370}{40} = \frac{37}{4} = 9\frac{1}{4}$

Децималните броеви ги запишуваме во децимални дропки.

Пример 5

Претвори во обична дропка $\frac{2 - \frac{2}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}}$.

$$\frac{2-\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}=\frac{\frac{10-2}{5}}{\frac{4+5}{6}}=\frac{\frac{8}{5}}{\frac{9}{6}}$$

Ги пресметуваме броителот и именителот.

$$=\frac{8\cdot 6}{5\cdot 9}=\frac{48}{45}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$$

Потоа двојната дропка ја претвораме во обична.

Задача 3

Претвори во обична дропка: а) $\frac{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}+\frac{1}{3}}$, б) $\frac{2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}}{3}$, в) $\frac{\frac{1}{5}-0{,}3}{1-\frac{2}{5}}$.

Задача 4

Колку пакетчиња од $\frac{1}{8}$ kg може да се наполнат од $31\frac{1}{4}$ kg кафе?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Претвори ја во обична дропка двојната дропка: а) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}$, б) $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}$, в) $\frac{-\frac{2}{7}}{4}$, г) $\frac{2}{\frac{3}{2}}$.

2. Претвори ја во обична дропка двојната дропка: а) $\frac{1\frac{3}{4}}{2\frac{1}{3}}$, б) $\frac{2{,}4}{\frac{4}{5}}$, в) $\frac{2\frac{2}{5}}{1{,}4}$, г) $\frac{0{,}12}{0{,}15}$.

3. Изврши ги назначените операции:

а) $\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}{5}$, б) $\frac{\frac{2}{3}-1}{1+\frac{2}{9}}$, в) $\frac{3}{\frac{3}{8}-1\frac{1}{6}}$, г) $\frac{2\frac{3}{10}+\frac{4}{15}-\frac{3}{30}}{\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}+\frac{1}{12}}$.

4. Разликата на дропките $\frac{6}{5}$ и $3\frac{3}{5}$ подели ја со нивниот збир.

5. Количникот на броевите $3\frac{5}{8}$ и 0,2 собери го со количникот на броевите 0,2 и $3\frac{5}{8}$.

6. Една бочва што собира $1\frac{5}{8}$ m³ вода се полни од славина за 3 минути. Со колку вода ќе ја наполниш бочвата ако славината ја отвориш само една минута?

17. СТЕПЕНИ СО ОСНОВА ЦЕЛ БРОЈ И СТЕПЕНОВ ПОКАЗАТЕЛ ПРИРОДЕН БРОЈ

Поим за степен

Активност

На 5 ракометни натпревари вкупниот број голови за својата екипа ги постигнале 5 ракометари кои дале по 5 гола на секој натпревар.

а) Запиши израз со кој можеш да пресметаш колку голови постигнала екипата на секој од натпреварите?

б) Запиши израз со кој можеш да пресметаш колку вкупно голови постигнала екипата на петте натпревари. Како ќе ги запишеш скратено овие изрази?

За производот од 4 множители еднакви на бројот 3 накусо запишуваме:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ читаме „3 на степен 4“ или „3 на четврта“.

Степеновиот показател 4 покажува колку пати основата 3 е помножена сама со себе.

Слично, имаме дека:

$5 \cdot 5 = 5^2$ читаме „5 на степен 2“ или „5 на квадрат“,

$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$ читаме „7 на степен 3“ или „7 на трета“ или „7 на куб“

Множењето на еднакви множители доведува до операцијата **степенување**.

Производот од n еднакви множители, од кои секој е цел број a, се нарекува **степен** на бројот a со **показател** природен број n и се означува со a^n (читаме „a на степен n“ или „a на n-та“).

Бројот a се вика **основа на степенот**.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ пати}} = a^n$$

a^n → степенов показател – природен број

a^n → основа на степенот – цел број

Бидејќи секој производ има барем два множители, според дефиницијата за степен, степеновиот показател треба да не е помал од два. Заради тоа, се договараме, степен на природен број a со показател 1 да биде самиот тој број a.

$a^1 = a$

Во таа смисла, на пример, $8^1 = 8$, $(-2)^1 = -2$, $1^1 = 1$, $(-1)^1 = -1$ итн.

Од дефиницијата забележуваме дека основата на степен е множителот, а показателот е бројот на множители и покажува колку пати основата на степенот е земена како множител.

Пример 1

Запиши го производот како степен, а потоа прочитај го:

а) $4 \cdot 4 \cdot 4$, б) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$, в) $(-x) \cdot (-x) \cdot (-x) \cdot (-x)$.

а) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$, читаме „4 на степен три“ или „4 на трета“,
б) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = (-6)^5$, читаме „минус 6 на степен пет“ или „минус 6 на петта“,
в) $(-x) \cdot (-x) \cdot (-x) \cdot (-x) = (-x)^4$, читаме „минус x на степен четири“ или „минус x на четврта“

Пример 2

Запиши го како производ од еднакви множители степенот: а) 7^3, б) $(-5)^5$, в) $(-y)^2$.

а) $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$, б) $(-5)^5 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$, в) $(-y)^2 = (-y) \cdot (-y)$.

Задача 1

Прецртај ја и пополни ја табелата:

степен	5^2		$(-3)^3$			$(-7)^8$		$(-z)^6$	
основа на степенот		4		-3	-1		1		$a - b$
степенов показател		8		2	5		9		4

Задача 2

Запиши го производот како степен, а потоа прочитај го:
а) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$, б) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$, в) $x \cdot x \cdot x \cdot x$, г) $(-b) \cdot (-b)$,

Задача 3

Прочитај го степенот, а потоа запиши го како производ од еднакви множители:
а) 6^3, б) $(-9)^2$, в) 0^6, г) 1^2, д) $(-1)^9$, ѓ) a^7, е) $(-c)^5$, ж) $(x + y)^4$.

Задача 4

Во една популација со 1 бактерија, бројот на бактерии N се зголемува според формулата $N = 3^n$, каде n е бројот на часови. Колку бактерии ќе има после 6 часа?

Вредност на степен

Активност

Арбен го прославил својот роденден. Тој поканил 3 ученици од неговото одделение. Секој од нив поканил уште по 3 ученици од другите одделенија, а тие поканиле уште по 3 ученици од друго училиште.

а) Запиши го со степен бројот на ученици кои биле поканети на роденденската прослава.
б) Запиши го степенот како производ и пресметај го производот.
в) Колку ученици биле поканети на роденденската прослава?

Вредноста на степенот на кој било цел број се пресметува така што степенот се запишува во вид на производ, а потоа се врши множењето.
Пресметувањето на вредноста на степенот можеме да ја вршиме и со употреба на калкулатор.
За пресметување на вредноста на степен со степенов показател 2 (квадрат) и степенов показател 3 (куб) ги користиме копчињата x^2 и x^3.

За пресметување на степен со степенов показател различен од 2 (квадрат) или 3 (куб) ги користиме копчињата x^n или y^x.

Активност

Запиши ги: а) квадратите на броевите од 1 до 20, б) кубовите на броевите од 1 до 5.
Потруди се да ги запомниш за да ги користиш при решавање на задачи.

Пример 1

Пресметај ја вредноста на степенот: а) 4^3, б) $(-2)^5$, в) $(-7)^2$, г) 1^4, д) 0^6.

а) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
или на калкулатор
4 x^3 =

Основата на степенот и степеновиот показател се позитивни броеви.
Вредноста на степенот е позитивен број.

б) $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$
или на калкулатор
(–) 2 x^n 5 =

Основата на степенот е негативен број, а степеновиот показател е непарен број.
Вредноста на степенот е негативен број.

в) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$
или на калкулатор
(–) 7 x^2 =

Основата на степенот е негативен број, а степеновиот показател е парен број.
Вредноста на степенот е позитивен број.

г) $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, д) $0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

Активност

Запиши го степенот и пресметај ја неговата вредност:
а) основа 3 и показател 6, б) основа -2 и показател 3, в) основа -4 и показател 2.
Дали можеш да изведеш заклучок за врската меѓу знакот на основата и парноста на степенот со знакот на вредноста на степенот?

- Вредноста на степен на позитивен цел број е позитивен цел број.
- Вредноста на степен на негативен цел број со парен показател е позитивен цел број.
- Вредноста на степен на негативен цел број со непарен показател е негативен цел број.
- Ако $a = 1$, тогаш $a^n=1$ и ако $a = 0$, тогаш $a^n = 0$, за секое $n \in \mathbb{N}$.

Задача 1

Без пресметување, определи го знакот на степенот: а) 13^5, б) $(-26)^{52}$, в) $(-77)^{45}$, г) 1^{44}.

Задача 2

Во физика, при пресметување на насочена сила (со знак „–“ за насока налево), се користи израз што ја содржи силата на квадрат или на куб. Ако сила изнесува –3 N, пресметај ја нејзината:
а) квадратна вредност, б) кубна вредност.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Запиши ги основата и степеновиот показател на степенот:
а) 6^3, б) $(-9)^2$, в) $(3x)^6$, г) $(-a + 4)^k$, д) $(-7p^7)^9$ ѓ) 0^{30}.

2. Запиши го како степен производот:
а) $9 \cdot 9 \cdot 9$, б) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$, в) $(-10x) \cdot (-10x) \cdot (-10x) \cdot (-10x)$,
д) $(a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b)$, ѓ) $xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy$.

3. Запиши го како производ степенот:
а) 6^7, б) $(-19)^2$ в) a^3, г) $(-x)^2$, д) $(-c - 1)^7$, ѓ) $(m^3)^5$.

4. Пресметај ја вредноста на степенот: а) 3^4, б) $(-6)^3$, в) $(-2)^4$.
Провери го твојот резултат со калкулатор.

5. Провери ја точноста на равенството: а) $(-5)^4 = 5^4$, б) $(-4)^3 = -4^3$, в) $(-3)^4 = -1 \cdot 3^4$.

6. За кои природни броеви е точно равенството:
а) $0^n = 0$, б) $2^n > 0$, в) $1^n = 1$, г) $(-4)^n > 0$, д) $(-7)^n < 0$?

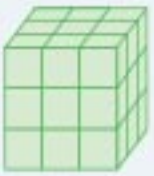
7. Во компјутерска симулација, бројот на дронови се удвојува по секоја рунда. Колку дронови ќе има по 5 рунди, ако на почеток имало 3 микродронови?

8. На елиминациски шаховски турнир бројот на играчи се преполовува по секое одиграно коло. Колку играчи ќе останат по 4 кола, ако турнирот започнал со 128 играчи?

9. Една жаба се наоѓа во координатниот почеток на x–оската. По секој скок го удвојува растојанието од координатниот почеток и ја менува насоката (лево, па десно, па лево, ...). Позицијата по n скокови е $(-2)^n$ метри.
а) Во која позиција е жабата по првиот, а во која по вториот скок?
б) По колку скокови жабата ќе биде лево од координатниот почеток, на растојание 32 m?

Истражување

На цртеж 1 е дадена $3 \times 3 \times 3$ коцка чија обвивка е обоена со зелена боја.



црт. 1

а) Од колку мали $1 \times 1 \times 1$ коцки се состои коцката?
б) Колку мали коцки се необоени?
в) Колку мали коцки има со 1 обоен ѕид, колку со 2 обоени ѕида, а колку со 3 обоени ѕида?
г) Одговори на истите прашања за $4 \times 4 \times 4$ коцка.
д) Прецртај ја и пополни ја табелата.

коцка	број на ѕидови обоени на малите коцки			
	0	1	2	3
$2 \times 2 \times 2$				
$3 \times 3 \times 3$				
$4 \times 4 \times 4$				
$5 \times 5 \times 5$				

ѓ) Дали можеш да откриеш некое правило во врска со бројот на мали коцки и бројот на обоени ѕидови на малите коцки? Провери го правилото за $9 \times 9 \times 9$ коцка.

18. КВАДРАТЕН КОРЕН И КУБЕН КОРЕН

Квадратен корен

Активност

Плоштината на еден квадрат е 16 cm².
а) Колку центиметри изнесува една негова страна?
б) Како ја пресметуваме страната?

Пример 1

а) Пополни ја табелата:

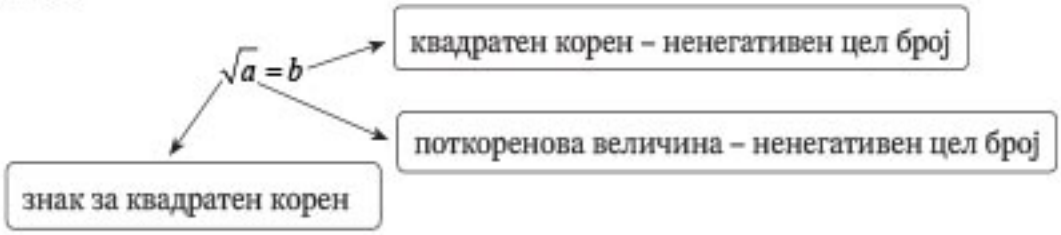
n			5		8
n^2	0	9		49	

За да ја пополниме табелата треба:
- за броевите 5 и 8 да ги најдеме нивните квадрати, а тоа се 25 и 64, соодветно,
- да најдеме броеви чии квадрати се 0, 9 и 49.

Второто барање е обратно од првото, односно за бројот 9 треба да најдеме број чиј квадрат е 9. Тој број се означува со $\sqrt{9}$ и се нарекува квадратен корен од бројот 9.
Слично имеме дека: $\sqrt{49} = 7$ бидејќи $7^2 = 49$, и $\sqrt{0} = 0$ бидејќи $0^2 = 0$.

Квадратен корен од ненегативен цел број a (ако постои) е ненегативен цел број b, таков што $b^2 = a$. Бројот a се вика **поткоренова величина.**
Операцијата со која се пресметува квадратниот корен од даден број се вика **коренување со коренов показател 2** или **коренување.**

Запишуваме:



Читаме: „квадратен корен од a е b“.

На калкулаторите постои посебно копче за пресметување на квадратен корен, најчесто означено со $\sqrt{\ }$. Така, за да пресметаме квадратен корен од 64 внесуваме:
6 4 $\sqrt{\ }$ = или $\sqrt{\ }$ 6 4 =.

Активност

Препиши ја и пополни ја табелата:

n	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
$\sqrt{n}$										

Потруди се да ги запомниш пресметаните вредности за да ги користиш при решавање на задачи.

Задача 1

Пресметај и направи проверка со калкулатор: а) $\sqrt{25}$, б) $\sqrt{64}$, в) $\sqrt{361}$, г) $\sqrt{121}$.

За бројот 43, на пример, не постои ненегативен цел број чијшто квадрат е бројот 43. Според тоа, не постои квадратен корен од бројот 43 во множеството ненегативни цели броеви. Во такви случаи можеме да направиме **проценка** на вредноста на квадратниот корен.

Пример 2

Процени ја вредноста на $\sqrt{7}$ на едно децимално место.

Прво одредуваме два ненегативни цели броја меѓу чии квадрати се наоѓа бројот 7 (цртеж 1). Бидејќи

$2^2 < 7 < 3^2$ имаме дека $2 < \sqrt{7} < 3$.

Ги пресметуваме квадратите на броевите 2; 2,1; 2,2; 2,3; ... 2,9; 3, редоследно, се додека нивната вредност надмине 7:

$2^2 = 4$; $2{,}1^2 = 4{,}41$; $2{,}2^2 = 4{,}84$; $2{,}3^2 = 5{,}29$;

$2{,}4^2 = 5{,}76$; $2{,}5^2 = 6{,}25$; $\mathbf{2{,}6^2 = 6{,}76}$; $\mathbf{2{,}7^2 = 7{,}29}$.

Според пресметките заклучуваме дека

$6{,}76 = 2{,}6^2 < 7 < 2{,}7^2 = 7{,}29$, па затоа $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$.

Растојанието од бројот $2{,}6^2 = 6{,}76$ до бројот 7 е 0,24 единици, додека растојанието од бројот $2{,}7^2 = 7{,}29$ до бројот 7 е 0,29 единици.

Бидејќи $0{,}24 < 0{,}29$, бројот $2{,}6^2 = 6{,}76$ е поблиску до бројот 7, што значи дека $\sqrt{7}$ е поблиску до бројот 2,6.

Според тоа, $\sqrt{7} \approx 2{,}6$.



црт. 1

Задача 2

Процени ја вредноста на $\sqrt{50}$ на едно децимално место. Потоа, провери ја твојата проценка со калкулатор.

Задача 3

Еден панел има 2401 еднакви светилки распоредени во квадратна решетка.

а) Колку светилки има во еден ред?

б) Ако секоја светилка зафаќа квадратче со страна 1 cm, колкава е должината на страната на панелот?

Кубен корен

Активност

Волуменот на коцка е 27 cm^3. Колку центиметри изнесува нејзиниот раб?
Како ќе ја пресметаш должината на работ?

Пример 3

Препиши ја и пополни ја табелата:

n	3	-4		
n^3			8	-125

За да ја пополниш табелата треба:

- да ги најдеш кубовите на броевите 3 и -4, а тоа се броевите 27 и -64, соодветно,
- да ги најдеш броевите чии кубови се 8 и -125.

Второто барање е обратно од првото, односно за бројот 8 треба да најдеш број чиј куб е 8. Тоа е бројот 2 кој се означува со $\sqrt[3]{8}$ и се нарекува кубен корен од бројот 8.

Слично, согледуваме дека $\sqrt[3]{-125} = -5$ бидејќи $(-5)^3 = -125$.

Кубен корен (трети корен) од цел број a е цел број b, таков што $b^3 = a$ и се означува со $\sqrt[3]{a}$. Бројот a се вика **поткоренова величина**.

Операцијата со која се пресметува кубен корен од даден број се вика **коренување со коренов показател 3** или **коренување**.

Запишуваме:



Читаме: „кубен корен од a е b“ или „трети корен од a е b“

На калкулаторите постои посебно копче за пресметување на кубен корен, најчесто означено со $\sqrt[3]{\ }$.

Така, за да пресметаме кубен корен од 125 внесуваме:

1 2 5 $\sqrt[3]{\ }$ = или $\sqrt[3]{\ }$ 1 2 5 =

Активност

Препиши ја и пополни ја табелата:

n	8	27	64	125
$\sqrt[3]{n}$				

Потруди се да ги запомниш пресметаните вредности за да ги користиш при решавање на задачи.

Задача 4

Пресметај и направи проверка со калкулатор: а) $\sqrt[3]{-27}$, б) $\sqrt[3]{8}$, в) $\sqrt[3]{-125}$, г) $\sqrt[3]{64}$.

Како и кај квадратните корени, не за секој број постои цел број чиј што куб е даденият број. Според тоа, не секој кубен корен е во множеството цели броеви. Во такви случаи можеме да направиме **проценка** на вредноста на кубниот корен.

Пример 4

Процени ја вредноста на $\sqrt[3]{30}$ на едно децимално место.

Прво одредуваме два цели броја меѓу чии кубови се наоѓа бројот 30. Бидејќи

$3^3 < 30 < 4^3$ имаме дека $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

Ги пресметуваме кубовите на броевите 3; 3,1; 3,2; 3,3; ... 3,9; 4, редоследно, се додека нивната вредност надмине 30 (цртеж 2):

$3^3 = 27$; $\mathbf{3{,}1^3 = 29{,}791}$; $\mathbf{3{,}2^3 = 32{,}768}$.

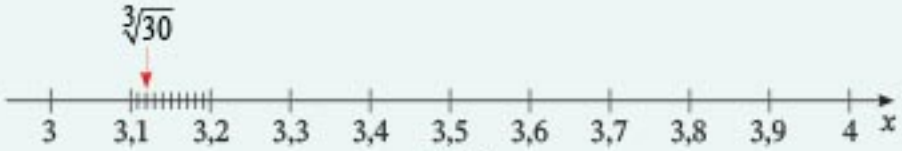
Според пресметките заклучуваме дека

$29{,}791 = 3{,}1^3 < 30 < 3{,}2^3 = 32{,}768$, па затоа $3{,}1 < \sqrt[3]{30} < 3{,}2$.

Растојанието **од бројот** $3{,}1^3 = 29{,}791$ до бројот 30 е 0,209 единици, додека растојанието **од бројот** $3{,}2^3 = 32{,}768$ до бројот 30 е 2,768 единици.

Бидејќи $0{,}209 < 2{,}768$, бројот $\mathbf{3{,}1^3} = 29{,}791$ е поблиску до бројот 30, што значи дека $\sqrt[3]{30}$ е поблиску до бројот 3,1.

Според тоа, $\sqrt[3]{30} \approx 3{,}1$.



црт. 2

Задача 5

Процени ја вредноста на $\sqrt[3]{10}$ на едно децимално место. Потоа, провери ја твојата проценка со калкулатор.

Задача 6

Една фабрика пакува кутии во форма на коцка во голем сандак. Во сандакот собира точно 125 кутии распоредени подеднакво по должина, ширина и висина. Колку кутии има по секоја страна на сандакот?

Пресметување вредност на броен израз со степени, квадратни и кубни корени

Пример 5

Пресметај ја вредноста на изразот: а) $(-5)^3+15^2$, б) $4\cdot(\sqrt{16}+\sqrt[3]{-125})$, в) $(4^2+2\sqrt[3]{64}):3$.

Потребно е да ги проследиме правилата:

а) $(-5)^3+15^2=-125+225=100$

б) $4\cdot(\sqrt{16}+\sqrt[3]{-125})=4\cdot(4+(-5))=$
$=4\cdot(-1)=-4$

в) $(4^2+2\cdot\sqrt[3]{64}):3=(16+2\cdot4):3=$
$=(16+8):3=$
$=24:3=8$

- При пресметување на вредност на броен израз со загради, **предност имаат операциите во заградите.**
- При пресметување на вредност на броен израз со операции степенување, коренување, множење, делење, собирање и одземање, прво ги извршуваме **степенувањето и коренувањето,** потоа **множењето** и **делењето** и на крај **собирањето** и **одземањето.**

Задача 7

Пресметај ја вредноста на изразот $(2^2-7\sqrt[3]{-125}):(5^2-4\sqrt{9})$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај и направи проверка со калкулатор: а) $\sqrt{225}$, б) $\sqrt{144}$, в) $\sqrt{361}$, г) $\sqrt{121}$.
2. Процени ја вредноста на $\sqrt{68}$ на едно децимално место.
3. Пресметај и направи проверка со калкулатор: а) $\sqrt[3]{-64}$, б) $\sqrt[3]{-8}$, в) $\sqrt[3]{125}$, г) $\sqrt[3]{75}$.
4. Матеј е колекционер на маркери. Тој сакал да ги подреди во квадратни рамки (бројот на редови е еднаков на бројот на колони).
   а) Првата рамка имала 9 реда со 9 маркери во секој ред. Колку маркери имало вкупно во оваа рамка?
   б) Втората рамка имала 121 маркер. Колку редови и колони имала оваа рамка, ако бројот на редови е еднаков на бројот на колони?
5. Процени ја вредноста на $\sqrt[3]{75}$ на едно децимално место.
6. Во лабораторија се испитува коцка од метал со волумен од 243 cm³. Колкав е работ на коцката?
7. Во кабинетот по математика се распоредени мали кутии со креда, кои имаат форма на коцка. Кутиите се наредени така што формираат голема коцка.
   а) Ако вкупно има 125 кутии, колку кутии има по една страна на големата коцка?
   б) Ако секоја мала кутија со креди има волумен од 64 cm³, колку е должината на страната на една кутија?

8. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $((-5)^3 + 16^2) \cdot (7^2 - 2^5)$, б) $(-11)^2 - 5 \cdot (3^3 + \sqrt[3]{-27})$, в) $(\sqrt{9} + 12^2) : \sqrt[3]{27}$.

9. Пресметај ја вредноста на изразот и направи проверка со калкулатор:

а) $4a - \sqrt[3]{a-8} + \sqrt{a} + 2$ за $a = 16$, б) $(a + 2\sqrt[3]{a-17} - 4)^2 - \sqrt{a}$ за $a = 81$.

19. ЗАПИШУВАЊЕ НА БРОЕВИТЕ ВО ОБЛИК $a \cdot 10^k$, за $a, k \in \mathbb{N}$

Во секојдневниот живот често се среќаваме со многу големи броеви – број на жители во определен град, држава или континент, растојание меѓу планетите, број на бактерии во бактериска популација итн. За полесно запишување на вакви броеви користиме степени со основа 10.

Степени со основа 10 и степенов показател природен број

Знаеме дека десет единици образуваат десетка, десет десетки образуваат стотка, десет стотки образуваат илјада итн. Десетката, стотката, илјадата итн., уште се викаат **декадни единици**.

Активност

Секоја декадна единица можеме да ја запишеме во облик на степен со основа 10. Проследи ја постапката и спореди го бројот на нули во декадната единица со степеновиот показател во нејзиниот запис во вид на степен со основа 10.

$10 = 10 = 10^1$

$100 = 10 \cdot 10 = 10^2$

$1\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$

$10\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$

$100\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$

$1\,000\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$

.....

Сигурно утврди дека бројот на нули во декадната единица е еднаков на степеновиот показател во нејзиниот запис во вид на степен со основа 10, односно

$\underbrace{1000\cdots0}_{k \text{ нули}} = 10^k$, за $k \in \mathbb{N}$.

Пример 1

Запиши ја во вид на степен со основа 10 декадната единица наведена во реченицата:

а) Масата на Нептун е околу $1\underbrace{000\cdots0}_{26\text{ нули}}$ kg. б) Масата на Месечината е околу $1\underbrace{000\cdots0}_{23\text{ нули}}$ kg.

а) $1\underbrace{000\cdots0}_{26\text{ нули}}=10^{26}$, б) $1\underbrace{000\cdots0}_{23\text{ нули}}=10^{23}$.

Задача 1

Запиши ја декадната единица што е еднаква на степенот наведен во реченицата:

а) Бројот на клетките во човечкото тело е 10^{14}. б) Масата на Сонцето е околу 10^{30} kg.

За читање и запишување на големите броеви, некои степени од облик 10^k, за $k \in \mathbb{N}$, имаат специјални имиња. Такви се степените:

10^3 се чита **кило** и се бележи со k, 10^9 се чита **гига** и се бележи со G,

10^6 се чита **мега** и се бележи со M, 10^{12} се чита **тера** и се бележи со T.

Пример 2

Николија купила компјутерски диск со меморија 1 гигабајт (GB). Адор пресметал дека $1\text{ GB} = 10^3\text{ MB}$.

Дали Адор точно пресметал?

Адор точно пресметал, бидејќи

1 GB = 1 000 000 000 B = 1000 · 1 000 000 B = $10^3 \cdot 10^6$ B = **10^3 MB**.

Запишување на броевите во облик $a \cdot 10^k$, за $a, k \in \mathbb{N}$

Броевите што можат да се запишат како производ од природен број и декадна единица, можат да се запишат и како производ од природен број и степен со основа 10.

Бројот 3 000 000 не можеме да го запишеме како степен со основа 10. Затоа, прво го запишуваме како производ од два броја од кои едниот може да се запише како степен со основа 10, односно

3 000 000 = 3 · 1 000 000 = 3 · 10^6.

Пример 3

Запиши го како производ од природен број и степен со основа 10, бројот наведен во реченицата:

а) Бројот на црвени крвни клетки во 1 l крв е околу $5\underbrace{000\cdots0}_{12\text{ нули}}$.

б) Дијаметарот на видливиот дел од Универзумот е околу $88\underbrace{000\cdots0}_{25\text{ нули}}$ m.

а) $5\underbrace{000\cdots0}_{12\text{ нули}} = 5\cdot 1\underbrace{000\cdots0}_{12\text{ нули}} = 5\cdot 10^{12}$, б) $88\underbrace{000\cdots0}_{25\text{ нули}}\ \text{m} = 88\cdot 1\underbrace{000\cdots0}_{25\text{ нули}}\ \text{m} = 88\cdot 10^{25}\ \text{m}$.

Задача 2

Запиши го како производ од природен број и степен со основа 10 бројот наведен во реченицата:

а) Растојанието од Сонцето до Нептун е околу $45\underbrace{000\cdots0}_{11\text{ нули}}\ \text{m}$.

б) Масата на Сонцето е околу $1\,99\underbrace{000\cdots0}_{28\text{ нули}}\ \text{kg}$.

Пример 4

Северна Македонија има $180\cdot 10^4$ жители, Грција има $10\cdot 10^6$ жители, а Бугарија има $69\cdot 10^5$ жители. Која држава има најмногу жители, а која најмалку?

$180\cdot 10^4 = 180\cdot 10^4$ $10\cdot 10^6 = 1\,000\cdot 10^4$ $69\cdot 10^5 = 690\cdot 10^4$	Ги запишуваме броевите така што сите степенови показатели во новите записи да бидат еднакви на 4 (најмалиот меѓу степеновите показатели).
$180 < 690 < 1\,000$	Ги споредуваме множителите пред соодветните степени со основа 10 како природни броеви.

Најмалку жители има Северна Македонија, а најмногу жители има Грција.

Пример 5

Брзината на светлината е околу 300 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Патот што го поминува светлината за една година се вика **светлосна година (ly)**. Околу колку километри изнесува една светлосна година? Запиши ја светлосната година како производ на два броја од кои едниот е степен со основа 10.

1 година = 365 дена 1 ден = 24 часа 1 час = 60 минути 1 минута е 60 секунди

$1\ \text{ly} \approx 300\,000\cdot 365\cdot 24\cdot 60\cdot 60 = 9460800\,000\,000 = 94\,608\cdot 10^8\ \text{km}$.

Една светлосна година изнесува околу $94\,608\cdot 10^8$ километри.

Задача 3

Еден суперкомпјутер обработува 25 000 000 инструкции во секунда.

а) Запиши го бројот на инструкции во облик на производ од природен број и степен со основа 10.

б) Спореди ја брзината на суперкомпјутерот со брзина на еден обичен компјутер кој обработува 25 000 инструкции во секунда.

Заокружување броеви до најблиската декадна единица 10^k, $k \in \mathbb{N}$

Запишувањето на броевите во облик на производ од природен број и степен со основа 10 може да ја олесни постапката на заокружување на броеви до најблиската декадна единица, односно до најблиската десетка, стотка, илјада итн.

Активност

1. Со помош на бројната права, заокружи ги броевите 342, 367, 362, 347:
   а) на најблиската десетка, б) на најблиската стотка.

Кое од заокружувањата е заокружување со вишок, а кое заокружување со кусок?

2. Ема и Адмир добиле задача да изработат презентација за постапката на заокружување на природни броеви, без употреба на бројна права.

Ема на својот хамер ги изложила правилата:

1) Ако цифрата десно од **цифрата на која заокружуваме** е:
   - 5, 6, 7, 8 или 9, тогаш цифрата на која заокружуваме ја зголемуваме за 1. Велиме **заокружуваме со вишок**.
   - 0, 1, 2, 3 или 4, тогаш цифрата на која заокружуваме останува непроменета. Велиме **заокружуваме со кусок**.
2) Цифрите **десно од цифрата на која заокружуваме** ги заменуваме со цифрата 0.
3) Цифрите **лево од цифрата на која заокружуваме** остануваат непроменети, освен кога имаме пренесување при заокружување со вишок.

Специјално, ако цифрата на која заокружуваме е 9 и заокружиме со вишок, тогаш ја заменуваме со цифрата 0, а првата цифра лево од неа ја зголемуваме за 1. Ако и цифрата лево е 9, пренесувањето продолжува налево сè додека не се зголеми цифра помала од 9.

Ако лево нема цифра, лево се допишува цифрата 1.

Адмир на својот хамер посочил неколку примери:

Бројот 825 заокружен на најблиската десетка е бројот 830. Запишуваме $825 \approx 830$.	Бројот 1237 заокружен на најблиската стотка е бројот 1200. Запишуваме $1237 \approx 1200$.
Бројот 962 заокружен на најблиската илјада е бројот 1000. Запишуваме $962 \approx 1000$.	Бројот 984 заокружен на најблиската стотка е бројот 1000. Запишуваме $984 \approx 1000$.

Дали презентацијата на Ема и Адмир е точно изработена?

Постапката за заокружување на природен број n на најблиската декадна единица 10^k, $k \in \mathbf{N}$, се состои од наоѓање на природен број кој има k нули и е најблиску до бројот n.

Пример 6

Заокружи го бројот:
а) 1 430 000 на најблиската декадна единица 10^5,
б) 22 372 000 000 на најблиската декадна единица 10^8,
в) 1 950 000 000 000 на најблиската декадна единица 10^{11}.

а) $1\,430\,000 \approx 1\,400\,000$
Заокружувањето е со кусок.

- Цифрата 4 има месна вредност $4 \cdot 10^5$, па цифрата на која заокружуваме е 4.
- Десно од цифрата 4 е цифрата 3, па цифрата 4 останува непроменета.
- Цифрите лево од цифрата 4 остануваат непроменети, а цифрите десно од цифрата 4 ги заменуваме со цифрата 0.

б) $22\,372\,000\,000 \approx 22\,400\,000\,000$
Заокружувањето е со вишок.

- Цифрата 3 има месна вредност $3 \cdot 10^8$, па цифрата на која заокружуваме е 3.
- Десно од цифрата 3 е цифрата 7, па цифрата 3 се заменува со цифрата 4.
- Цифрите лево од цифрата 3 остануваат непроменети, а цифрите десно од цифрата 3 ги заменуваме со цифрата 0.

в) $1\,950\,000\,000\,000 \approx 2\,000\,000\,000\,000$
Заокружувањето е со вишок.

- Цифрата 9 има месна вредност $9 \cdot 10^{11}$, па цифрата на која заокружуваме е 9.
- Десно од цифрата 9 е цифрата 5,
- па цифрата 9 се заменува со цифрата 0 и допишуваме 1 пред неа.
- Цифрите десно од цифрата 9 ги заменуваме со цифрата 0.

Задача 4

Во лабораторија се подготвени 564 300 000 молекули на ново соединение за експеримент.
а) Запиши го бројот на молекули како на производ од природен број и степен со основа 10.
б) Заокружи го бројот на молекули до најблиската декадна единица 10^6.
в) Заокружи го бројот на молекули до најблиската декадна едицица 10^7.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Запиши го како производ од природен број и степен со основа 10 бројот:
   а) 40 000 000, б) 5 000 000 000, в) 600 000 000 000.
2. Во еден грам земјиште има околу 1 000 000 000 бактерии. Запиши го бројот на бактерии во облик на степен со основа 10.
3. Во болница се подготвени 3 200 000 дози вакцина за една година.
   а) Запиши го бројот на дози во облик на производ од природен број и степен со основа 10.
   б) Објасни зошто обликот под а) е полесен за употреба отколку даденият облик.

4. Во голем супермаркет има 120 000 лименки со сок. Сопственикот сака да го запише бројот на лименки на начин со кој може полесно да се споредува со другите супермаркети. Запиши го бројот на лименки во облик на производ од природен број и степен со основа 10.

5. Во табелата е даден бројот на жители во неколку држави. Подреди ги броевите од најмалиот до најголемиот.

држава	број на жители
Индија	$1\,420 \cdot 10^6$
САД	$335 \cdot 10^6$
Германија	$84 \cdot 10^6$
Малта	$52 \cdot 10^4$
Исланд	$38 \cdot 10^4$

6. Една машина извршува 10 000 аритметички операции за една секунда.
   а) Најди го бројот на аритметичките операции што таа ги извршува за еден час.
   б) Запиши го тој број во вид на степен со основа 10.

7. Еден голем град произведува 4 275 000 kg отпад на ден.
   а) Запиши го количеството отпад во облик на производ од природен број и степен со основа 10.
   б) Претстави го количеството произведен отпад за еден месец во облик на производ од природен број и степен со основа 10.

8. Заокружи го бројот:
   а) 44 162 000 000 000 на најблиската декадна единица 10^{12},
   б) 78 000 000 000 000 на најблиската декадна единица 10^{13},
   в) 3 989 000 000 000 000 на најблиската декадна единица 10^{15}.

9. Во голема фабрика се произведени 426 000 000 000 батерии за една година.
   а) Запиши го бројот на произведени батерии како на производ од природен број и степен со основа 10.
   б) Заокружи го бројот на батерии до најблиската декадна единица 10^{10}.
   в) Заокружи го бројот на батерии до најблиската декадна единица 10^{11}.

Истражување

Преку интернет најди други примери на големи броеви од природните науки и запиши ги како производ од природен број и декадна единица.

20. МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ СТЕПЕНИ СО ЕДНАКВИ ОСНОВИ

Множење степени со еднакви основи

Активност

Разгледај и објасни како се помножени степените со еднакви основи:

$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 2^{2+3}$.

Посочи ги чекорите во кои се користени дефиницијата за степен и асоцијативниот закон за множење.

Правилото важи за производот на кои било два степени со еднакви основи.

Производот на два степена со еднакви основи е еднаков на степен со истата основа и степенов показател еднаков на збирот од показателите на тие степени, односно $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $a \in \mathbb{Z}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Пример 1

Запиши го во вид на степен производот: а) $8^2 \cdot 8^6$, б) $(-3)^3 \cdot (-3)$, в) $x^m \cdot x^n$.

а) $8^2 \cdot 8^6 = 8^{2+6} = 8^8$, б) $(-3)^3 \cdot (-3) = (-3)^3 \cdot (-3)^1 = (-3)^{3+1} = (-3)^4$, в) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

Можеме да согледаме дека правилото важи и за производот од повеќе степени со еднакви основи. Имено, заради асоцијативниот закон за собирање и асоцијативниот закон за множење, имаме

$$a^m \cdot a^n \cdot a^k = (a^m \cdot a^n) \cdot a^k = a^{m+n} \cdot a^k = a^{(m+n)+k} = a^{m+n+k}.$$

При множење на степени со еднакви основи, основата останува иста, а степеновите показатели се собираат.

Пример 2

Запиши го во вид на степен производот:

а) $6^2 \cdot 6^6 \cdot 6^3$, б) $(-5)^7 \cdot (-5)^2 \ (-5)^5 \cdot (-5)^3$, в) $y^k \cdot y^n \cdot y^p$.

а) $6^2 \cdot 6^6 \cdot 6^3 = 6^{2+6+3} = 6^{11}$, б) $(-5)^7 \cdot (-5)^2 \ (-5)^5 \cdot (-5)^3 = (-5)^{7+2+5+3} = (-5)^{17}$,

в) $y^k \cdot y^n \cdot y^p = y^{k+n+p}$.

Задача 1

Запиши го во вид на степен производот:
а) $10^4 \cdot 10^6$, б) $(-3)^4 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^3$, в) $a^5 \cdot a^6$, г) $(x-1)^4 \cdot (x-1) \cdot (x-1)^7 \cdot (x-1)^{12}$.

Пример 3

Упрости го изразот: а) $9x^7 \cdot 3x^3$, б) $0{,}3(y+1)^5 \cdot 0{,}4(y+1)^4 \cdot 0{,}1(y+1)^7$.

а) $9x^7 \cdot 3x^3 = (9 \cdot 3)\, x^{7+3} = 27x^{10}$,
б) $0{,}3(y+1)^5 \cdot 0{,}4(y+1)^4 \cdot 0{,}1(y+1)^7 = (0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1)(y+1)^{5+4+7} = 0{,}012(y+1)^{16}$.

Задача 2

Упрости го изразот: а) $9x^7 \cdot 3x^3$, б) $5a^7 \cdot 3a \cdot 0{,}1a^3$.

Пример 4

Цвеќарката Мила засадува по 2^2 цвеќиња во една саксија. Во текот на денот засадила 2^3 саксии. Колку вкупно цвеќиња засадила таа во текот на денот?

Да го запишеме решението во вид на степен, а потоа да ја пресметаме неговата вредност. Имаме

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32.$$

Цвеќарката Мила во текот на денот засадила 32 цвеќиња.

Задача 3

Една фабрика првиот ден произвела 2^5 лименки. Колку лименки ќе произведе за 4 дена, ако секој ден производството се удвојува?

Делење степени со еднакви основи

Активност

Откриј го правилото за делење на степени со еднакви основи според пресметките:

$$3^6 : 3^2 = \frac{3^6}{3^2} = \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}} = 3^4 = 3^{6-2}$$

Количникот на два степена со еднакви основи различни од нула, кај кои степеновиот показател на деленикот е поголем од степеновиот показател на делителот е еднаков на степен со истата основа и степенов показател еднаков на разликата од показателите на деленикот со делителот на тие степени, односно

$a^n : a^m = a^{n-m}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ и $n > m$.

Пример 5

Запиши го во вид на степен количникот: а) $11^8 : 11^3$, б) $(-x)^{12} : (-x)^4$.

а) $11^8 : 11^3 = 11^{8-3} = 11^5$, б) $(-x)^{12} : (-x)^4 = (-x)^{12-4} = (-x)^8$.

Задача 4

Запиши го во вид на степен количникот:
а) $5^6 : 5^4$, б) $(-4)^{12} : (-4)^7$, в) $b^{72} : b^{66}$, г) $(x-y)^7 : (x-y)^3$.

Задача 5

Кои од следните равенства се точни:
а) $5^2 \cdot 5^4 = 5^6$, б) $3^5 \cdot 3^3 = 3^2$, в) $7^9 : 7^2 = 7^7$, г) $x^x \cdot x^8 = x^{x-8}$, д) $m^3 : m = m^3$?
Образложи го одговорот.

Пример 6

Упрости го изразот: а) $x^{12} : (x^3 \cdot x^5)$, б) $\frac{a^9}{a^4 \cdot a^2}$.

а) $x^{12} : (x^3 \cdot x^5) = x^{12} : x^{3+5} = x^{12} : x^8 = x^{12-8} = x^4$, б) $\frac{a^9}{a^4 \cdot a^2} = \frac{a^9}{a^{4+2}} = \frac{a^9}{a^6} = a^{9-6} = a^3$.

Задача 6

Упрости го изразот: а) $s^3 \cdot s^4 \cdot s^2 : s^5$, б) $n^4 \cdot n^1 : n^2$, в) $r^{16} : r^4 \cdot r^3 \cdot r^5$.

Задача 7

Пресметај ја вредноста на изразот: а) $(2^{14} \cdot 2^2) : 2^9$, б) $\frac{3^{14}}{3^7 \cdot 3^4}$, в) $\frac{8 \cdot 2^4 \cdot 2^5}{2^3 \cdot (2^5 : 4)}$.

Пример 7

Една фабрика во текот на денот пакува 3^4 кутии со бонбони. Во текот на ноќта, фабриката пакува 3^2 кутии со бонбони.
Колку пати повеќе кутии со бонбони пакува фабриката во текот на денот отколку во текот на ноќта?

Да го запишеме решението во вид на степен и да ја пресметаме неговата вредност:
$3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2 = 9$.
Фабриката пакува 9 пати повеќе кутии со бонбони во текот на денот отколку во текот на ноќта.

Пример 8

Во хемиска лабораторија се чува раствор на натриум (Na) во кој концентрацијата на честички се зголемува и намалува во зависност од условите. Научникот запишал израз за концентрацијата

$C = x^5 \cdot x^3 : x^4$.

Упрости го изразот за концентрацијата.

Сите степени имаат основа x, па можеме да ги примениме правилата за множење и делење на степени со еднакви основи.

При множење на степени со иста основа, се собираат показателите:

$C = x^5 \cdot x^3 : x^4 = x^8 : x^4$.

При делење на степени со иста основа, се одземаат показателите:

$C = x^8 : x^4 = x^4$.

По упростувањето, за концентрацијата добиваме $C = x^4$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Помножи ги степените: а) $6^5 \cdot 6^6$, б) $q^3 \cdot q^{42} \cdot q^2$, в) $t^4 \cdot t^1 \cdot t^2$.

2. Подели ги степените: а) $2^9 : 2^7$, б) $\frac{x^8}{x^3}$, в) $y^{17} : y^6$, г) $(a-3b)^{19} : (a-3b)^{12}$.

3. Запиши го во вид на степен производот:
а) $5^4 \cdot (-5)^6$, б) $-x \cdot x^2 \cdot (-x)^3$, в) $(3-a)^2 \cdot (a-3)^6$.

4. Запиши го во вид на степен изразот: а) $2^{41} - 2^{40} - 2^{39}$, б) $3^{51} : (2 \cdot 3^{46} + 7 \cdot 3^{46})$.

5. Упрости го изразот: а) $15x^8 \cdot 3x^2$, б) $32y^4 : 8y^2$, в) $3y^2 \cdot x^3 \cdot 5y^5 \cdot 4x^5$, г) $(y^7 + 2y^2z) : y$.

6. Пресметај ја вредноста на изразот: а) $(7^4 \cdot 7^2) : 7^5$, б) $\frac{3^6 \cdot 3^{12}}{27 \cdot 3^{14}}$, в) $\frac{2^{12}}{2^6 \cdot 2^3} : \frac{16 \cdot 2^3}{(2^3 : 4) \cdot 2^4}$.

7. Пресметај: а) $x^5 \cdot x^2$, за $x = -2$ и $x = 2$, б) $y^7 : y^4$, за $y = -3$ и $y = 3$.

8. За која вредност на n е точно равенството:
а) $2^5 \cdot 2^7 = 2^{5+n}$, б) $a^3 \cdot a^4 = a^{n+2}$, в) $4^5 : 4^3 = 4^{5-n}$, г) $(x+1)^8 : (x+1)^n = (x+1)^2$?

9. Бројот на бактерии во бактериска популација се зголемува 2 пати на секои 30 минути. Колку бактерии ќе има во популацијата после 3 часа, ако на почетокот имало 4 бактерии?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Во множеството $A = \{2, 4, 8, 10\}$ е зададена релацијата R: x е за 2 пати поголем од y. Претстави ја релацијата:

а) на табеларен начин, б) на описен начин, в) со граф.

2. За секое писмено проверување по математика, Мила учела различен број на часови. Таа ги ставила во релација часовите за учење со бројот на освоени поени. Податоците се дадени во табела.

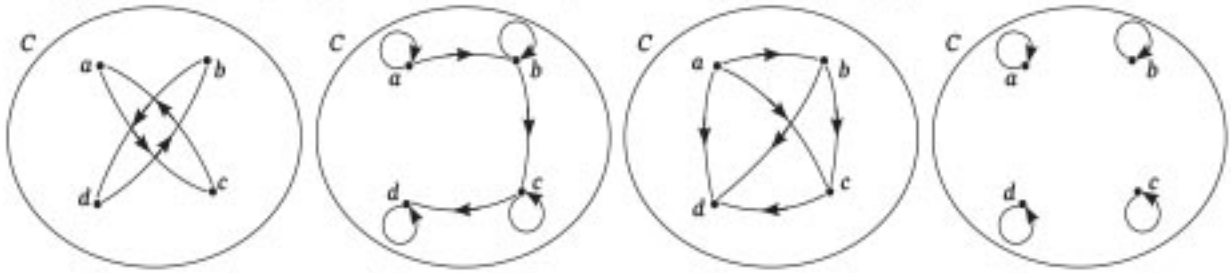
ден во седмицата	време на учење (во часови)	освоени поени
понеделник	1 час	60 поени
вторник	2 часа	70 поени
среда	1,5 часа	65 поени
четврток	3 часа	85 поени
петок	2,5 часа	75 поени

Објасни ја врската меѓу времето на учење и освоените поени.

Претстави ја вака определената релација: а) со граф, б) на табеларен начин.

3. Кои од релациите R_1, R_2, R_3 и R_4 во множеството $C = \{a, b, c, d\}$ на цртеж 1 се:

а) рефлексивни, б) симетрични, в) антисиметрични, г) транзитивни?



Релација R_1 Релација R_2 Релација R_3 Релација R_4

црт. 1

4. Во множество ученици од VIII одделение се зададени релациите:

R_1: „... има исто презиме со ...“ и R_2: „... има име со помала должина од ...“.

а) Без да ги претставиш релациите со граф, провери ги својствата: рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност.

б) Која од нив е релација за еквивалентност, а која е релација за подредување?

5. Во една спортска секција учениците си разменуваат реквизити за вежбање.

Познато е дека:

Дамјан ѝ позајмил топка на Ема; Ема му позајмила јаже за вежбање на Лука;

Лука ѝ позајмил обрач на Мила; Мила му позајмила јаже на Дамјан.

а) Претстави ја релацијата R_1: „... позајмил реквизит на ...“, меѓу учениците на табеларен начин и со граф.

б) Провери дали релацијата е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

в) Дали релацијата R_2: „... може да добие реквизит по низа позајмувања од ...“ (на пример, ако Дамјан ѝ позајмил на Ема, а Ема на Лука, тогаш Дамјан индиректно може да добие реквизит од Лука) е релација на еквивалентност?

6. Наведи пример кој го задоволува тврдењето:
а) Сите природни броеви се цели броеви, но сите цели броеви не мора да бидат природни броеви.
б) Сите цели броеви се рационални броеви, но сите рационални броеви не мора да бидат цели броеви.

7. Запиши го периодичниот децимален број со дропка:
а) 0,(9); б) 0,(143); в) 3,1(5); г) 3,45(67); д) 80,23(54).

8. Во канистер има 3,(4) *l* вода. Запиши го количеството вода во литри со дропка.

9. Во една продавница литар млеко чини 1,2(5) евра.
а) Запиши ја цената на млекото со дропка. б) Колку ќе плати Астрит за 5 *l* млеко?
в) Астрит има ограничен буџет од 10 евра. Колку литри млеко може да купи за да го искористи буџетот максимално?

10. Во уметничка работилница 0,4 од боите е црвена боја, $\frac{3}{10}$ е сина боја и 30% е жолта боја.
а) Која боја е најмногу застапена?
б) Направи табела во која секое количество на боја ќе го запишеш со дропка, децимален број и процент.

11. Во експеримент се прави раствор. Во 400 ml вода се растворени 80 g сол. Потоа се додадени 100 ml вода и уште 40 g сол.
а) Пресметај го процентот на сол во почетниот раствор.
б) Пресметај го новиот процент на сол по додавањето на вода и сол.
в) Дали концентрацијата на сол се зголеми или намали и за колку проценти?
г) Изрази ја новата концентрација како дропка од вкупниот раствор.

12. Еден кошаркар на почетокот на сезоната постигнува просечно 20 поени по натпревар. Во вториот дел од сезоната ја зголемува ефикасноста за 25%, а во последниот дел ја намалува за 10% од таа зголемена вредност. Колку поени во просек постигнува на крајот од сезоната?

13. Упрости го размерот:
а) 0,25 m : 75 cm : 0,5 dm, б) 3 kg : 0,75 kg : 250 g, в) 3 *l* : 1200 m*l* : 0,6 *l*.

14. Милан го поминува патот од дома до училиште за:
1 час и 14 минути, ако оди пешки, 30 минути, ако оди со велосипед,
18 минути, ако оди со јавен превоз.
Запиши го и упрости го размерот на времињата, оди пешки спрема оди со велосипед спрема оди со јавен превоз.

15. Внатрешните агли на еден четириаголник се во размер 7 : 3 : 5 : 3.
Пресметај ја големината на најголемиот агол.

16. За чоколадно млеко размерот на млеко спрема вода спрема топено чоколадо е 3 : 2 : 1. Познато е дека Игор има 15 *l* млеко.

а) Колку литри вода, а колку литри топено чоколадо му се потребни?

б) Колку е вкупното количество на чоколадно млеко?

17. Нина треба да премести 30 коцки на растојание од 5 m. Таа преместува една коцка за 6 секунди. Колку време ѝ е потребно да пренесе 30 коцки ако пренесува:

а) по 2 коцки наеднаш, б) по 3 коцки наеднаш?

18. Менсур вози автобус со брзина од 80 km/h и го поминува својот пат за 5 h 20 min. Томислав вози автомобил со брзина од 100 km/h и го поминува својот пат за 3 h 10 min. Кој од нив поминал подолг пат?

19. Пресметај:

а) $\frac{1}{2}$ од 36, б) $\frac{1}{4}$ од 72, в) $\frac{1}{2}$ од 36, г) 0,1 ·180.

20. Во сад имало $1\frac{1}{4}$ kg брашно. Егзона искористила 0,7 kg за колачи. Потоа Илир додал уште 1,2 kg брашно. Колку брашно има сега во садот?

21. Еден хемичар подготвува раствор во лабораторија. Во чаша имал 2,5 *l* раствор. При загревање испариле 0,75 *l*, а потоа додал $1\frac{1}{4}$ *l* свеж раствор.

а) Колкава е вкупната количина на раствор во чашата по сите промени?

б) Ако хемичарот сака да има 4 *l* раствор, уште колку литри треба да додаде или да одземе?

22. По предметот географија, учениците проучуваат реки и нивни просечни проточни количини (проток).

Реката А има просечен проток од 320,5 m^3/s, а реката Б има просечен проток од 145,25 m^3/s. Инженерите планираат изградба на заедничка брана. Тие одлучуваат во браната да одат $\frac{3}{4}$ од протокот на реката А и 85% од протокот на реката Б.

а) Колкав ќе биде новиот проток на реката А?

б) Колкав ќе биде новиот проток на реката Б?

в) Колкав ќе биде вкупниот проток што ќе се влева во браната од двете реки?

г) За колку поголем проток има реката А во однос на реката Б по промените?

23. Пресметај на најлесен начин:

а) $\left(5\frac{3}{4}-4\frac{5}{6}-6\frac{3}{4}+1\frac{1}{6}\right)\cdot 1\frac{1}{5}$, б) $-4\cdot\frac{-5}{3}\cdot 1\frac{1}{2}\cdot(-3)$.

24. Пресметај ја вредноста на изразот: $\left[\left(5\frac{7}{12}-3\frac{17}{36}+1\frac{2}{3}-4\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{36}\right)\cdot\left(1-\frac{9}{13}\right)\right]-[(0,5-2,5)]\cdot\frac{1}{2}$.

25. Една продавница за овошје купила 25 kg јаболка по цена од 1,8 евра за килограм. За транспорт и пакување дополнително платила 12,5 евра. Потоа продавницата продала $\frac{3}{5}$ од јаболката по цена од 2,4 евра за килограм, а преостанатите ги продала со попуст од 0,3 евра за килограм од првичната цена. Колкава добивка имала продавницата по продажбата на јаболката?

26. Претвори во обична дропка:

а) $\dfrac{1:2\frac{1}{15}}{3\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{20}+\frac{1}{3}}:\dfrac{4\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{13}}{5:1\frac{7}{8}}$,

б) $\dfrac{4\frac{1}{12}\cdot 8\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{23}}{6\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot 5\frac{3}{4}}\cdot\dfrac{5\frac{1}{7}\cdot 7}{7\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{31}}$.

27. Колку пати ќе се заврти тркалото на велосипедот на патека од 51 m, ако периметарот на тркалото е $1\frac{1}{4}$ m?

28. Алгите во еден аквариум се удвојуваат на секои 6 часа. Колку алги ќе има во аквариумот по 24 часа, ако на почеток имало 5 алги?

29. Еден робот тргнува од координатниот почеток на x-оската. При секое придвижување го удвојува растојанието од координатниот почеток и ја менува насоката наизменично од десно во лево. Неговата позиција по n придвижувања е $(-2)^n$ метри.

а) Во која позиција е роботот по првото, а во која по второто придвижување?

б) По колку придвижувања роботот ќе биде лево од координатниот почеток, на растојание 8 m?

30. Процени ја на едно децимално место вредноста на: а) $\sqrt{51}$, б) $\sqrt[3]{100}$.
Потоа, провери ја твојата проценка со калкулатор.

31. Научниците истражуваат мала метална коцка која се користи како дел во батерии за електрични автомобили. Таа коцка има волумен од 216 cm^3.

а) Колкава е должината на страната на металната коцка?

б) Колку е плоштината на металната коцка?

в) Во лабораторијата се прават минијатурни копии на истата коцка со страна 6 пати помала. Колку е волуменот на минијатурната коцка?

32. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $3\cdot 5^2+4^3-5\cdot 7^3$,

б) $(-2)(-3)(-4)^2-(-1)^5(-2)^2$,

в) $100\cdot(-2)^3+2\cdot\sqrt{169}\cdot(-3)^3-0{,}3\sqrt[3]{27}$,

г) $\left(2^3+\sqrt{256}\right):\left((-3)^5-\sqrt[3]{125}\right)$.

Направи проверка со калкулатор.

33. Во табелата се дадени растојанијата на планетите до Сонцето.

а) Запиши ги растојанијата како производ од природен број и степен со основа 10.

б) Подреди ги растојанијата од најмалото до најголемото.

планета	растојание до Сонцето во km
Меркур	58 000 000
Венера	108 000 000
Марс	228 000 000
Земја	150 000 000
Јупитер	780 000 000
Сатурн	1 430 000 000
Уран	2 870 000 000
Нептун	4 500 000 000

34. Годишниот буџет на една држава е 87 456 000 000 денари. Заокружи го на најблиската декадна единица 10^9.

35. Упрости го изразот:

а) $(x^{12} : x^6) \cdot (x^7 : x^3) \cdot (x^7 : x^5 \cdot x^9)$, б) $\frac{a^7 \cdot a^8 : a^3}{3a^5}$.

36. Во една фабрика се произведуваат метални коцки. Секоја коцка има раб долг 2 cm.

а) Запиши ја во вид на степен, а потоа пресметај ја плоштината на две страни на коцката.

б) Запиши ја во вид на степен, а потоа пресметај ја плоштина на четири страни на коцката.

Тема 2:

ГЕОМЕТРИЈА

Резултати од учење:

При изучувањето на оваа тема ќе можеш да:

- решаваш проблеми со користење на: агли со заемно паралелни краци, агли со заемно нормални краци, периферен и централен агол над ист кружен лак, делови од круг и кружница.
- применуваш складност на триаголник во решавање на проблеми од секојдневен контекст.
- ги користиш карактеристиките и својствата на 2Д формите (триаголник и четириаголник) во решавање проблеми со конструкции и Питагорова теорема.
- го демонстрираш разбирањето за полиедар, правилен полиедар и врската меѓу бројот на ѕидови, рабови и темиња кај полиедрите.
- трансформираш 2Д форми со комбинирање на трансформациите осна симетрија, транслација и ротација.

1. АГЛИ СО ЗАЕМНО ПАРАЛЕЛНИ КРАЦИ И АГЛИ СО ЗАЕМНО НОРМАЛНИ КРАЦИ

Агли со заемно паралелни краци

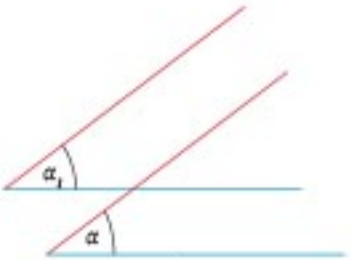
Активност

1. На паркиралиштето се нацртани паралелни линии за означување на паркинг-местата како на слика 1. Каква е заемната положба на соодветните краци на аглите 1 и 2?



слика 1

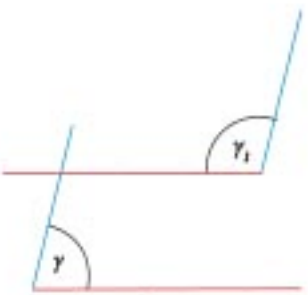
Аглите α и α_1 на цртеж 1а имаат заемно паралелни краци со исти насоки.
Аглите β и β_1 на цртеж 1б имаат заемно паралелни краци со спротивни насоки.
Аглите γ и γ_1 на цртеж 1в имаат заемно паралелни краци. Притоа, едниот пар краци се со исти насоки, а другиот пар се со спротивни насоки.



црт. 1а



црт. 1б



црт. 1в

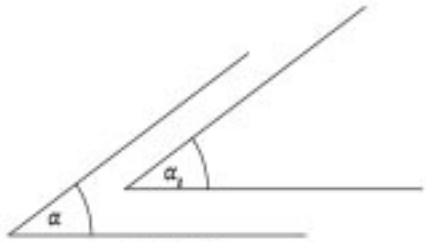
Паровите агли α и α_1, β и β_1, γ и γ_1 се примери на **агли со заемно паралелни краци**.

Задача 1

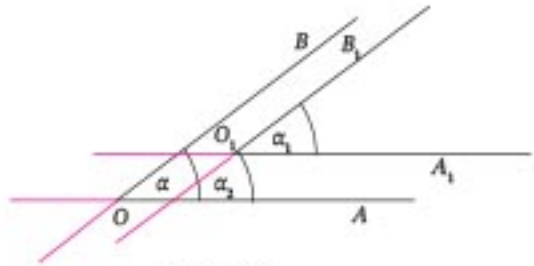
Нацртај два агла со заемно паралелни краци:
а) со исти насоки, б) со спротивни насоки,
в) едниот пар краци се со исти насоки, а другиот пар со спротивни насоки.

Пример 1

На цртеж 2а, аглите α и α_1 имаат заемно паралелни краци, со исти насоки. Внимателно измери ги, а потоа спореди ги нивните големини. Што забележуваш? Дали може да дојдеш до истиот заклучок без мерење?



црт. 2а

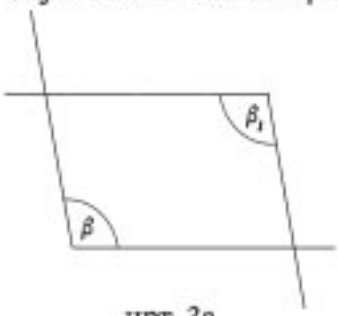


црт. 2б

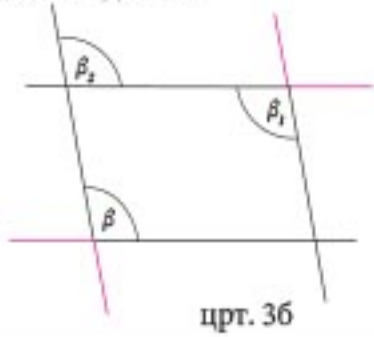
По мерењето сигурно утврди дека дадените агли се еднакви, односно дека $\alpha = \alpha_1$.
За да утврдиме без мерење дека $\alpha = \alpha_1$, ќе ги продолжиме краците на аглите до прави (црт. 2б). Тогаш забележуваме дека:
$OB \parallel O_1B_1$ и OA е трансверзала, па $\alpha = \alpha_2$ (како согласни агли);
$OA \parallel O_1A_1$ и O_1B_1 е трансверзала, па $\alpha_2 = \alpha_1$ (како согласни агли);
Од $\alpha = \alpha_2$ и $\alpha_2 = \alpha_1$ добиваме дека $\alpha = \alpha_1$.

Пример 2

Објасни зошто аглите β и β_1 на цртеж 3а се еднакви.



црт. 3а

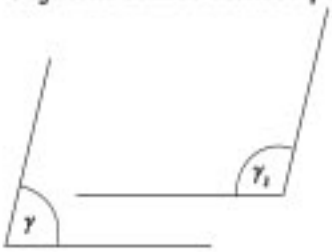


црт. 3б

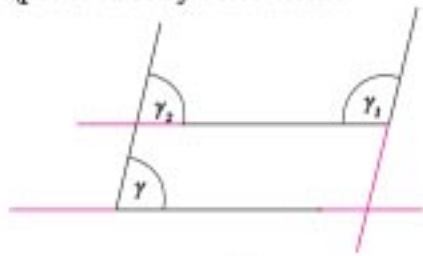
Аглите β и β_1 имаат заемно паралелни краци со спротивни насоки. Ако ги продолжиме краците на аглите до прави (црт. 3б), забележуваме дека:
$\beta = \beta_2$ (како согласни агли) и $\beta_2 = \beta_1$ (како наизменични агли).
Од $\beta = \beta_2$ и $\beta_2 = \beta_1$ следува дека $\beta = \beta_1$.

Пример 3

Објасни зошто аглите γ и γ_1 на цртеж 4а се суплементни.



црт. 4а



црт. 4б

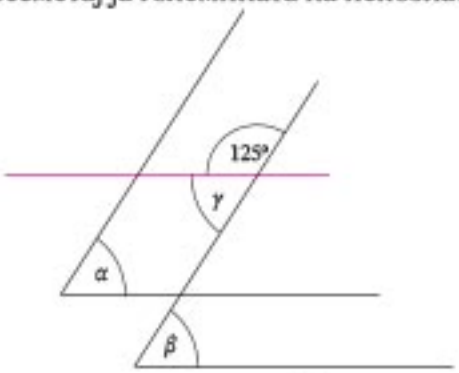
Аглите γ и γ_1 имаат заемно паралелни краци, едниот пар краци се со исти насоки, а другиот пар со спротивни насоки.

Ако ги продолжиме краците на аглите до прави (црт. 4б), забележуваме дека:
$\gamma = \gamma_2$ (како согласни агли) и $\gamma_2 + \gamma_1 = 180°$ (се суплементни агли како спротивни агли).
Од $\gamma = \gamma_2$ и $\gamma_2 + \gamma_1 = 180°$ добиваме дека $\gamma + \gamma_1 = 180°$, односно γ и γ_1 се суплементни агли.

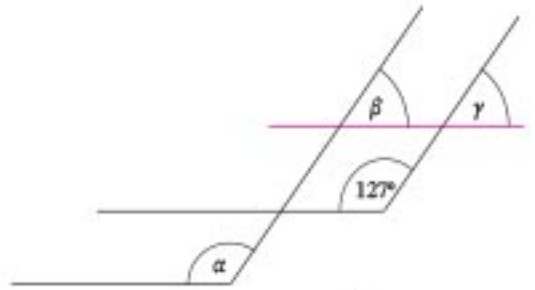
Агли со заемно паралелни краци се:
- еднакви, ако двата пара краци се со исти насоки или со спротивни насоки,
- суплементни, ако еден пар краци се со исти насоки, а другиот пар со спротивни насоки.

Задача 2

Пресметај ја големината на непознатите агли на цртеж 5а и цртеж 5б.



црт. 5а



црт. 5б

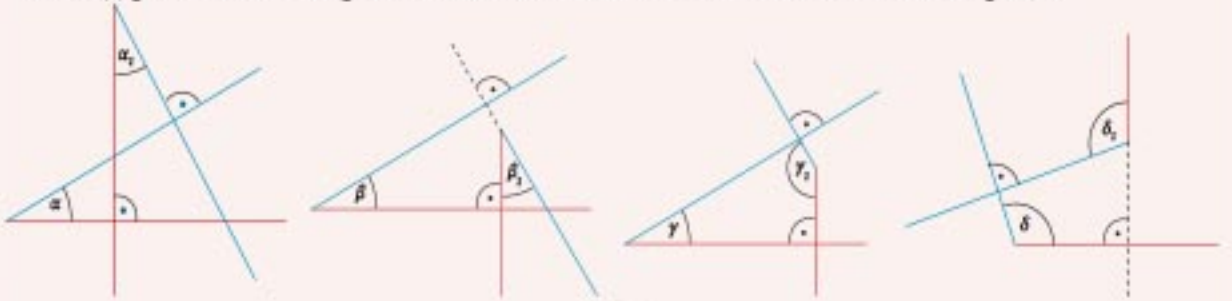
Задача 3

На планот на еден град се прикажани две паралелни улици: Улица А и Улица Б. Улицата Дијагонална ги сече и двете улици, и на пресекот со Улица А формира агол од 120°.
На пресекот на Улица Б и Дијагонална формирани се четири агли.
а) Нацртај дел од планот со трите улици и означи ги аглите.
б) Најди ја големината на аглите на пресекот со Улица Б и Дијагонална.

Агли со заемно нормални краци

Активност

Разгледај ги аглите на цртеж 6. Каква е заемната положба на нивните краци?



црт. 6

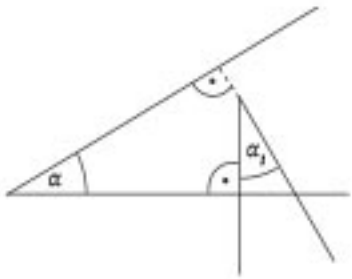
Прецртај ја и пополни ја табелата.

пар агли	големина на аглите	споредба на аглите (еднакви или различни)	збир на аглите
α и α_1			
β и β_1			
γ и γ_1			
δ и δ_1			

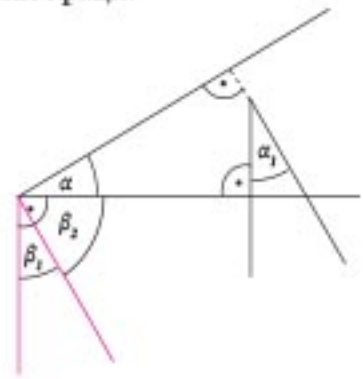
Паровите агли α и α_1, β и β_1, γ и γ_1 , δ и δ_1 разгледани во активноста се примери на **агли со заемно нормални краци**.

За да ја одредиме врската меѓу големината на два агли со заемно нормални краци, ќе ги разгледаме следните два случаи:

1. На цртеж 7а, аглите α и α_1 имаат заемно нормални краци.



црт. 7а



црт. 7б

На цртеж 7б, аголот β_1 е нацртан со теме како аголот α, така што α_1 и β_1 имаат заемно паралелни краци со исти насоки. Забележуваме дека:

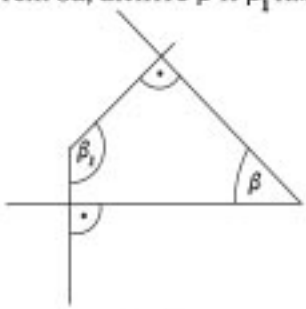
$\alpha_1 = \beta_1$ (како агли со заемно паралелни краци со исти насоки).

$\alpha + \beta_2 = 90^\circ$ и $\beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$;

Од $\alpha = 90^\circ - \beta_2$ и $\beta_1 = 90^\circ - \beta_2$ добиваме дека $\alpha = \beta_1$;

Од $\alpha = \beta_1$ и $\alpha_1 = \beta_1$ добиваме дека $\alpha = \alpha_1$.

2. На цртеж 8а, аглите β и β_1 имаат заемно нормални краци.



црт. 8а



црт. 8б

На цртеж 8б, аголот γ е нацртан со теме како аголот β_1, така што γ и β имаат заемно нормални краци. Забележуваме дека:

$\beta = \gamma$ (агли со заемно нормални краци, како во претходниот случај),

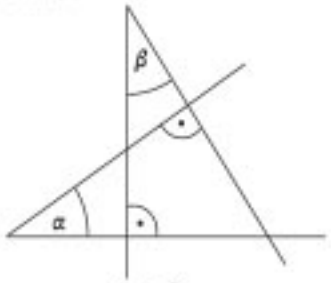
$\gamma + \beta_1 = 180^\circ$;

Од $\beta = \gamma$ и $\gamma + \beta_1 = 180^\circ$ добиваме дека $\beta + \beta_1 = 180^\circ$.

Агли со заемно нормални краци се или еднакви или суплементни.

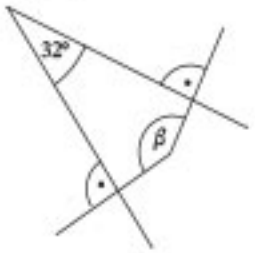
Задача 4

а) Какви се меѓу себе аголот α и аголот β на цртеж 9?



црт. 9

б) Пресметај ја големината на аголот β на цртеж 10.



црт. 10

Задача 5

Аглите α и β се агли со заемно нормални краци. Ако α = 151°, тогаш колкав може да биде аголот β? Направи цртеж.

Задача 6

Во еден двор, оградата и патеката се поставени така што се сечат под агол од 60°. Сопственикот поставил клупа така што нејзиниот подолг раб е нормален на оградата. Потоа во продолжение засадил цветна леа нормална на патеката.

а) Нацртај скица на оградата, патеката, клупата и цветната леа.

б) Колкав е аголот меѓу клупата и цветната леа?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. На слика 2 е даден план на дел од населба со куќи и игралиште.

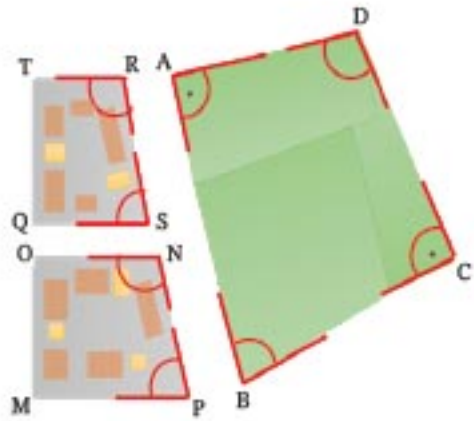
а) Препиши и дополни со знаците:
„ || “ – „ ... е паралелен со ... “ и
„⊥“ – „ ...е нормален со ... “:
PM ___ SQ, PN ___ SR, DA ___ AB,
DC ___ CB, RT ___ NO.

б) Запиши ги паровите агли со заемно паралелни краци.

в) Запиши ги паровите агли со заемно нормални краци.

г) Ако ∢$MPN = 65°$, пресметај ја големината на ∢ONP, ∢QSR и ∢SRT.

д) Ако ∢ADC = 110°, пресметај ја големината на ∢ABC.



слика 2

2. Нацртај произволен остар агол α, произволен тап агол β и точки S и P, во нивната внатрешна област, соодветно. Нацртај агол:

а) ASB чии краци се паралелни со краците на аголот α, со исти насоки,

б) CPD чии краци се паралелни со краците на аголот β, со спротивни насоки.

3. Нацртај агли AOB и COD и точки T и Q во нивната внатрешна област, соодветно. Нацртај агол:
   а) ETF чии краци се паралелни на краците на аголот AOB и кракот TE има иста насока со кракот OA, а кракот TF спротивна насока со OB.
   б) GQH чии краци се паралелни на краците на аголот COD и кракот QH има спротивна насока со кракот OC, а кракот QG има иста насока со OD.

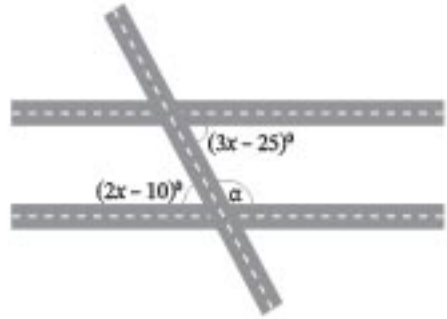
4. Нацртај агол α и во неговата внатрешност точка M. Потоа нацртај агол со теме во точката M и краци кои се заемно нормални со краците на аголот α. Колку такви агли постојат?

5. Еден од двата агла со заемно паралелни краци има 56°. Колку степени има другиот агол ако:
   а) краците им се со исти насоки, б) краците им се со спротивни насоки,
   в) еден пар краци се со исти, а другиот пар со спротивни насоки?

6. Најди ги аглите α и β со заемно паралелни краци, ако:
   а) нивниот збир е 154°, б) нивната разлика е 76°.

7. Најди ги аглите α и β со заемно нормални краци, ако: а) $\alpha = 125° + \beta$, б) $\alpha = 3\beta$.

8. Две паралелни улици се пресечени со трета улица како на слика 3. Најди го аголот α.



слика 3

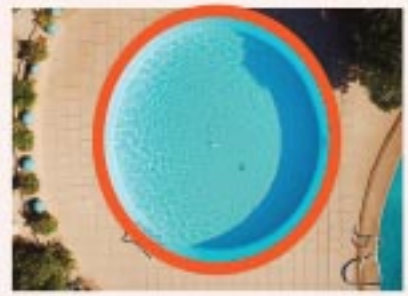
9. Во еден град, улиците A и B се сечат под агол од 55°. На планот урбанистот црта попречна улица C, така што C е нормална на A, и улица D, така што D е нормална на B.
   а) Нацртај скица со улиците A, B, C и D.
   б) Колкав е аголот меѓу улиците C и D?
   в) Од кој вид агли се аголот меѓу A и B и аголот меѓу C и D?

2. КРУЖНИЦА, КРУГ И НИВНИ ДЕЛОВИ

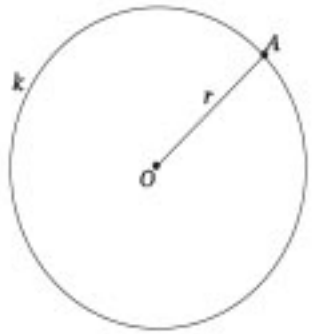
Кружница и круг

Активност

Поимите за кружница и круг се меѓу поважните поими во геометријата.
а) На слика 1, одреди што претставува кружница, а што круг.
б) Во што е разликата помеѓу овие две форми?


слика 1

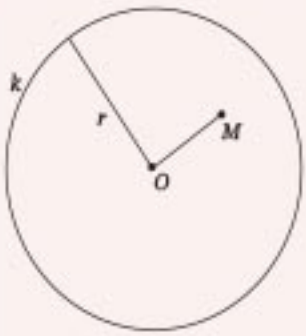
Да се потсетиме, **кружница** е множеството од сите точки A во рамнината кои се на еднакво растојание r од дадена точка O во рамнината (црт. 1).
Должината $r = \overline{OA}$ се нарекува **радиус** на кружницата.
Но, радиус на кружницата може да означува отсечка што го поврзува центарот со произволна точка од кружницата.
Кружница со центар во точка O и радиус r се означува со $k(O, r)$ или само со k.



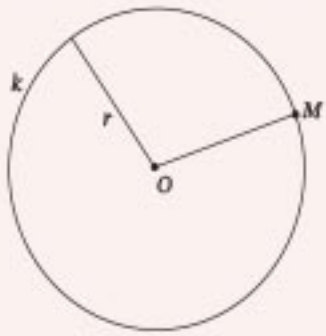
црт. 1

Активност

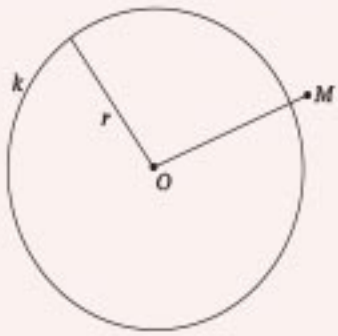
Каква е положбата на точка M во однос на кружницата k, ако нејзиното растојание до центарот O на кружницата е:
а) помало од r (црт. 2а) б) еднакво на r (црт. 2б) в) поголемо од r (црт. 2в).



црт. 2а

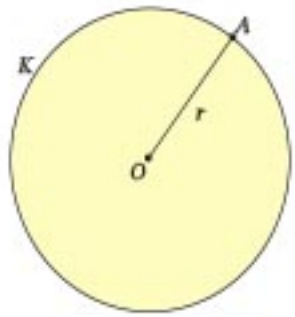


црт. 2б



црт. 2в

Да се потсетиме, **круг** е множеството од сите точки A во рамнината кои се на растојание помало или еднакво на r од дадена точка O во рамнината (црт. 3).
Секој круг се состои од една кружница и нејзината внатрешност.
Ако точката А е на кружницата, тогаш должината $r = \overline{OA}$ се нарекува **радиус** на кругот.
Круг со центар во точка O и радиус r се означува со $K(O, r)$ или само со K.



црт. 3

Задача 1

Нацртај:
а) кружница со произволен центар и радиус 2 cm,
б) круг со произволен центар и радиус 3 cm,
в) две концентрични кружници со произволен центар и радиуси 3 cm и 4 cm.

Кружен прстен

Активност

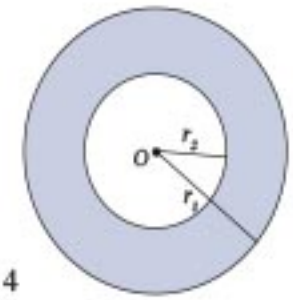
На слика 2 се дадени неколку предмети од твојата околина. Дали воочуваш 2Д форма што се појавува кај сите предмети? Опиши ја со зборови.



слика 2

Кружен прстен е дел од рамнината ограничен со две концентрични кружници.

На цртеж 4 е прикажан кружен прстен ограничен со две концентрични кружници со центар во точката O и радиуси r_1 и r_2.
Двете концентрични кружници припаѓаат на кружниот прстен.



црт. 4

Задача 2

Нацртај две концентрични кружници со радиуси 3 cm и 5 cm, а потоа обој го кружниот прстен определен со нив.

Задача 3

Спортско игралиште има патека за трчање во форма на кружен прстен определен со кружници со радиуси 10 m и 12 m.
а) Нацртај скица на патеката и обој ја патеката.
б) Колкава е ширината на патеката?

Кружен отсечок

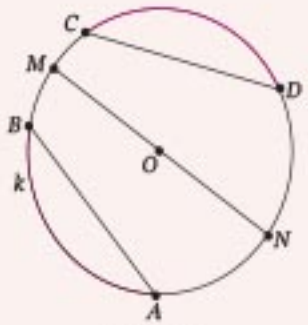
Активност

1. а) Што е **тетива** на кружница? Именувај ги тетивите во кружница k дадена на цртеж 5.

б) Што е **дијаметар** на кружница? Именувај го дијаметарот на дадената кружница.

в) Што е **кружен лак** во кружница? Именувај ги кружните лакови што одговараат на тетивите AB и CD, соодветно.
Како се нарекува кружниот лак што одговара на дијаметарот MN?

г) Именувај ги тетивите што одговараат на кружните лакови $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$, соодветно. Која тетива одговара на кружниот лак $\overset{\frown}{MN}$?



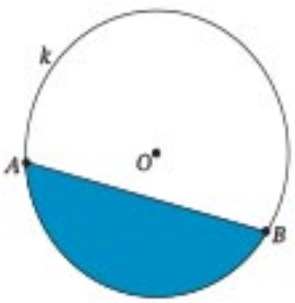
црт. 5

2. Опиши 2Д форма којашто се појавува кај предметите на слика 3.


слика 3

Кружен отсечок е дел од кругот ограничен со една тетива и кружниот лак што одговара на таа тетива.
Ако тетивата е дијаметарот на кругот, тогаш кружниот отсечок се вика **полукруг**.

На цртеж 6 е претставен кружен отсечок којшто тетивата AB го отсекува од кругот.
Тетивата AB и кружниот лак $\overset{\frown}{AB}$ припаѓаат на отсечокот.



црт. 6

Задача 4

Нацртај кружница со радиус 4 cm и тетива MN со должина 6 cm. Потоа обој го помалиот кружен отсечок определен со тетивата MN и кружниот лак $\overset{\frown}{MN}$ што одговара на тетивата.

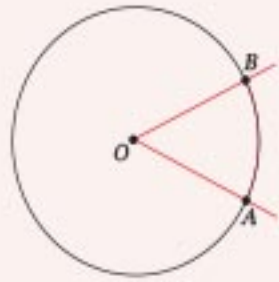
Задача 5

Марко изработува украс за училишната приредба. Тој отсекол две парчиња, едното од круг со зелена боја и другото од круг со црвена боја. Во кој случај Марко може да состави круг од отсечените парчиња? Образложи го одговорот.

Кружен исечок

Активност

1. Како се нарекува аголот AOB на цртеж 7?



црт. 7

2. Опиши ја 2Д формата што се појавува кај сите предмети на слика 4.



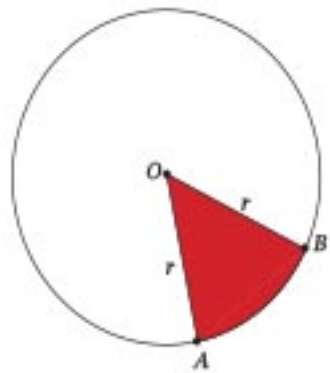
слика 4

Кружен исечок е дел од кругот ограничен со два негови радиуси и кружниот лак што е зафатен со нив.

На цртеж 8 е прикажан кружен исечок ограничен со два радиуси OA и OB и кружниот лак $\overset{\frown}{AB}$ што е зафатен со нив.

Радиусите OA и OB и кружниот лак $\overset{\frown}{AB}$ припаѓаат на кружниот исечок.

На секој централен агол одговара еден кружен исечок и обратно, на секој кружен исечок одговара еден централен агол.



црт. 8

Задача 6

Нацртај круг со радиус 3 cm, а потоа обој еден кружен исечок определен со два негови радиуси и кружен лак што одговара на централен агол од 90°.

Задача 7

Пица има форма на круг со радиус $r = 15\,\text{cm}$. Пицата е исечена на 8 еднакви парчиња.

а) Каква геометриска форма има едно парче пица?

б) Колкав е централниот агол на едно парче од пицата?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. На парцела, во форма на круг, сместено е езерце со тревник околу него и мост преку езерцето (слика 5).

а) Како се вика делот од кружната парцела што е тревник?

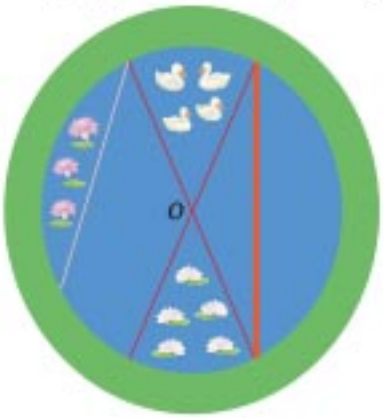
б) Како се вика помалиот дел од езерцето поделено со мостот?

в) Како се вика делот од езерцето каде што се сместени патките?

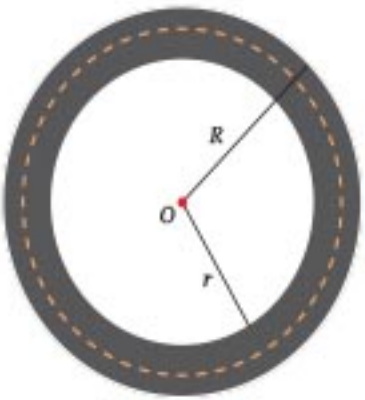
г) Спореди ги по големина делот со патки и делот со бели лотоси.

д) Колку кружни отсечоци се претставени на сликата од езерцето?

ѓ) Колку кружни исечоци се претставени на сликата од езерцето?



слика 5

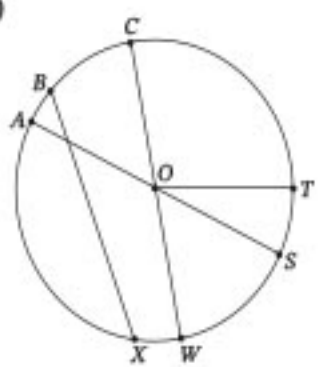


слика 6

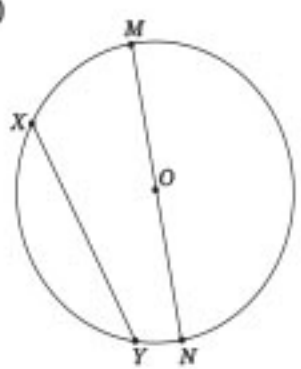
2. Колку е широк коловозот на кружната патека на слика 6, ако $R = 87{,}2$ m и $r = 82{,}7$ m?

3. Именувај ги сите кружни исечоци што ги гледаш на цртеж 9.

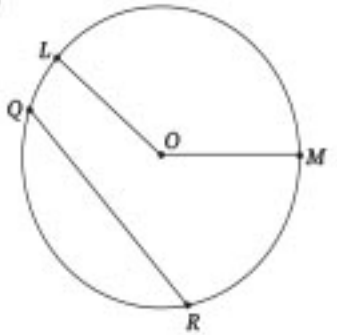
а)



б)



в)



црт. 9

4. Именувај ги сите кружни отсечоци што ги гледаш на цртеж 9.

5. Нацртај:

а) кружен прстен ограничен со две концентричните кружници со радиуси 2 cm и 5 cm,

б) кружен исечок со радиус 3 cm што одговара на централен агол од 120°,

в) кружен отсечок со радиус 4 cm што одговара на централен агол од 60°.

6. Проектна задача

Од 4 плочки со идентичен дизајн формирани се 2 различни слики како на слика 7.



слика 7

Нацртај ги дадените дизајни (слика 8) на плочка во форма на квадрат со страна 10 cm. Изработи барем 4 исти плочки од картон и состави ги како во примерот. Обиди се тоа да го направиш на повеќе начини.

а) б)



слика 8

3. ПЕРИФЕРЕН АГОЛ

Активност

Ана се наоѓа во центарот на кружницата O. Таа го гледа кружниот лак меѓу двете дрвја под агол BOC. Илир се наоѓа во точката A од кружницата.

а) Како се вика аголот BOC?

б) Кои ќе бидат темето и краците на аголот под кој ќе го гледа истиот кружен лак од точката A (слика 1)?



слика 1

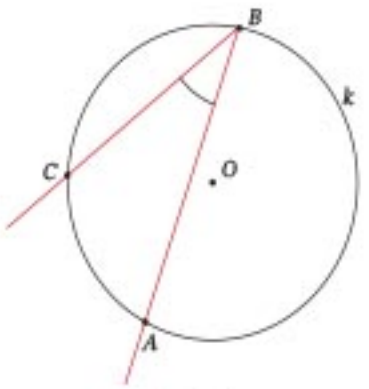
Агол чие теме е на кружницата, а краците ја сечат кружницата, се вика **периферен агол**.

На цртеж 1 се дадени кружница k со центар O и агол ABC чие теме лежи на кружницата.

Неговите краци отсекуваат кружен лак $\overset{\frown}{AC}$ на кружницата на кој не лежи темето B.

Аголот ABC е периферен агол над лакот $\overset{\frown}{AC}$.

За лакот $\overset{\frown}{AC}$ што лежи во областа на периферниот агол ABC велиме дека **одговара** на периферниот агол ABC.



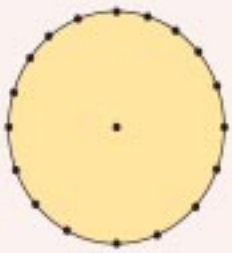
црт. 1

Активност

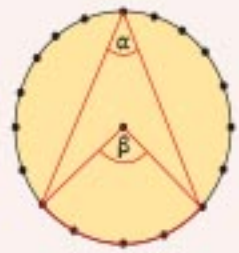
За полесно да ги согледаш врските меѓу аглите во кружницата, изработи своја „аглова кружница".

Ќе ти биде потребно: парче картон, стиропор, агломер, ластик и околу 20 иглички со топчиња за прицврстување материјали од хартија на стиропор.

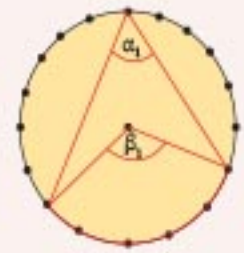
Подготовка: На картонот со шестар нацртај кружница со радиус околу 10 cm. Прицврсти ја кружницата за стиропорот, ставајќи иглички долж неа на приближно исто растојание. Една игличка стави во центарот на кружницата (слика 2а). Намести го ластикот како на слика 2б. Означи ги централниот и периферниот агол со α и β, соодветно. Измери ги со агломер аглите α и β, а потоа спореди ги по големина. Промени го лакот на агловата кружница и означи ги централниот и периферниот агол со α_1 и β_1, соодветно (слика 2в). Измери ги и спореди ги аглите α_1 и β_1. Повтори ја постапката уште неколку пати со менување на лакот на агловата кружница. Што можеш да заклучиш во врска со големината на периферниот и централниот агол над ист кружен лак?



слика 2а



слика 2б



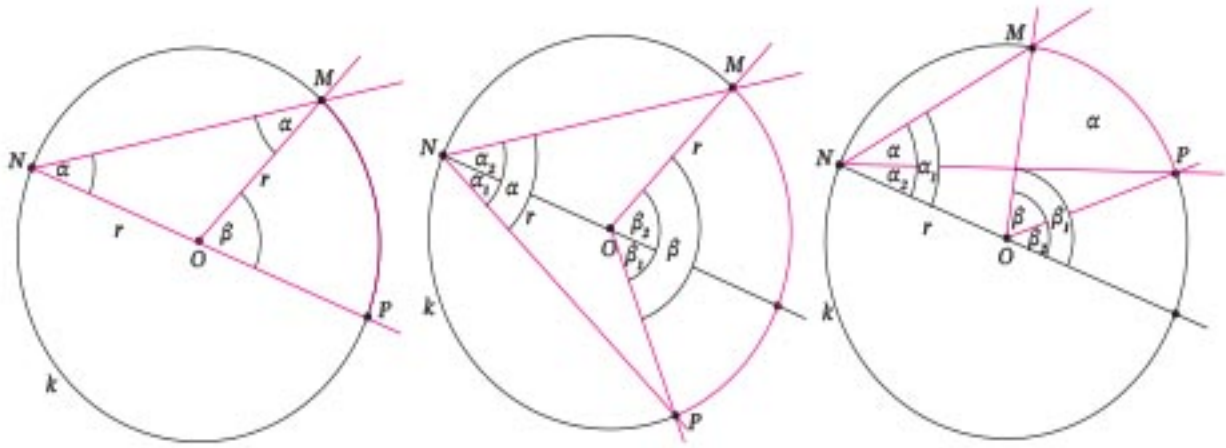
слика 2в

За да ја одредиме врската меѓу големината на централниот и големината на периферниот агол над ист кружен лак ќе ги разгледаме следните три случаи:

1. Центарот на кружницата лежи на еден од краците на периферниот агол (црт. 2а). Триаголникот OMN е рамнокрак, па за неговиот надворешен агол β важи

$$2\alpha = \beta, \quad \alpha = \frac{\beta}{2},$$

каде што α е аголот при основата на триаголникот.



црт. 2а црт. 2б црт. 2в

2. Центарот на кружницата лежи во областа на периферниот агол (црт. 2б).
Според цртежот наоѓаме дека $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ и $\beta_1 + \beta_2 = \beta$. Тогаш

$$2\alpha = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = \beta,\ \ \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

3. Центарот на кружницата лежи надвор од областа на периферниот агол (црт. 2в).
Според цртежот наоѓаме дека $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$ и $\beta_1 - \beta_2 = \beta$. Тогаш

$$2\alpha = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 = \beta,\ \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

Големината на периферниот агол над даден лак е еднаква на половина од централниот агол над истиот лак.

Пример 1

Најди го периферниот агол кој е над ист кружен лак со централен агол од:
а) 130°, б) 215°.

Да го означиме со α периферниот агол кој треба да го пресметаме.
Бидејќи периферен агол е двојно помал од централен агол β над ист кружен лак, добиваме:

а) $\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$, б) $\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{215^\circ}{2} = 107^\circ 30'$.

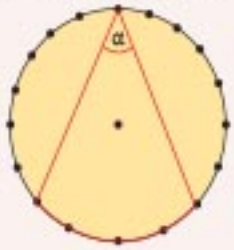
Задача 1

Најди ја големината на периферен агол над лак кој е $\frac{1}{6}$ од кружницата.

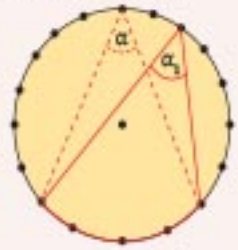
Активност

Повторно ќе ја користиме аголовата кружница (слика 3а). Измери го аголот α. Премести го ластикот од темето на аголот α во друга иглички од кружницата како на слика 3б. Измери го добиениот агол α_1. Повтори ја постапката уште неколку пати со поместување на темето на аголот.

Што заклучуваш во врска со големината на измерените агли?



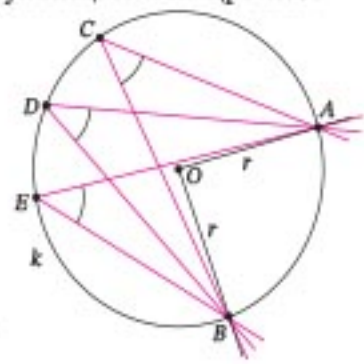
слика 3а



слика 3б

Ако добро мереше, сигурно утврди дека периферните агли над ист кружен лак што ги измери се еднакви меѓу себе. До истиот заклучок ќе дојдеш ако ги измериш и споредиш големините на периферни агли над кружниот лак AB во кружницата k на цртеж 3.

Можеме да размислуваме на следниов начин: бидејќи големината на секој периферен агол над ист кружен лак е еднаква на половина од централен агол над истиот лак, сите периферни агли над тој кружен лак се еднакви меѓу себе.

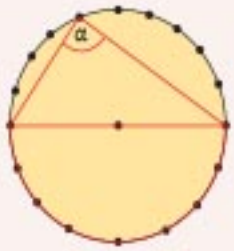


црт. 3

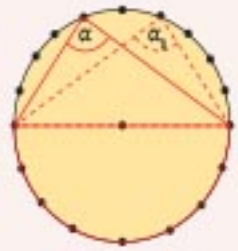
Сите периферни агли над ист кружен лак во една кружница се **еднакви меѓу себе**.

Активност

Намести го ластикот на агловата кружница така што централниот агол да биде рамен агол. Тогаш периферниот агол ќе биде над полукружницата како на слика 4а. Измери го аголот α (слика 4б). Премести го ластикот од темето на аголот α во друга иголичка од кружницата како на цртежот. Измери го добиениот агол α_1. Повтори ја постапката уште неколку пати со поместување на темето на аголот. Што заклучуваш во врска со големината на измерените агли?



слика 4а

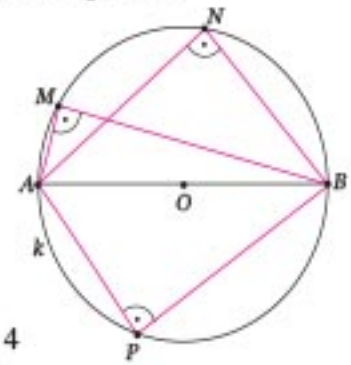


слика 4б

Ако добро мереше, сигурно утврди дека периферните агли што ги измери над полукружницата се прави агли.

До истиот заклучок ќе дојдеш ако со агломер ги измериш и споредиш големините на периферните агли над централниот агол AOB на кружницата k на цртеж 4.

Можеме да размислуваме на следниов начин: бидејќи големината на секој периферен агол над ист кружен лак е еднаква на половина од централниот агол над истиот лак, сите периферни агли над полукружницата се прави агли. Ова својство е познато како **Талесова теорема**.



црт. 4

Секој периферен агол над полукружница е **прав**.

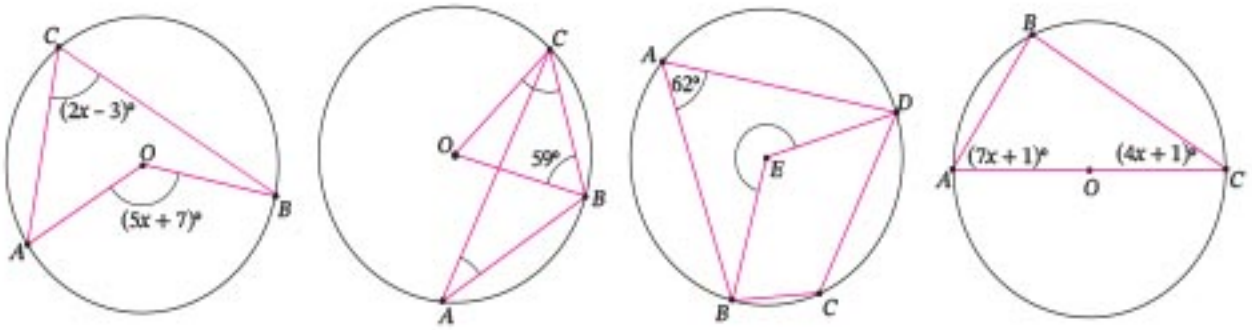
Ако имаме во вид дека полукружницата одговара на дијаметарот на кружницата, можеме да кажеме дека секој периферен агол над дијаметар на кружница е прав агол.
Оттука заклучуваме дека сите точки во една кружница со дијаметар AB (освен точките A и B) се темиња на правоаголен триаголник со хипотенуза AB.

Задача 2

Дадена е права p и две точки A и B кои не лежат на неа. На правата p нацртај точка M, така што аголот AMB да е прав.
Упатство: Нацртај кружница за која отсечката AB ќе биде дијаметар. Означи ја со M пресечната точка на кружницата со дадената права p. Аголот AMB е периферен агол над дијаметарот AB.

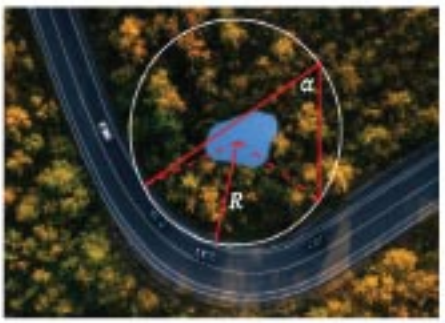
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Најди го периферниот агол што се наоѓа над ист кружен лак со централен агол од:
   а) 158°, б) 89°.
2. Најди го централниот агол што се наоѓа над ист кружен лак со периферен агол од:
   а) 32°, б) 83°.
3. Колкав е периферниот агол над кружен лак што претставува:
   а) $\frac{3}{4}$, б) $\frac{4}{9}$, в) $\frac{5}{6}$, г) $\frac{3}{5}$ од кружницата?
4. Во кои граници се менува централниот агол во една кружница, а во кои граници се менува периферниот агол?
5. Збирот на големината на периферниот агол и соодветниот централен агол во една кружница изнесува 150°. Пресметај ја големината на двата агла.
6. Според цртеж 5 најди ја големината на аглите:
   а) $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle AOB$, б) $\sphericalangle CAB$, в) $\sphericalangle BED$ и $\sphericalangle BCD$, г) $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ACB$.



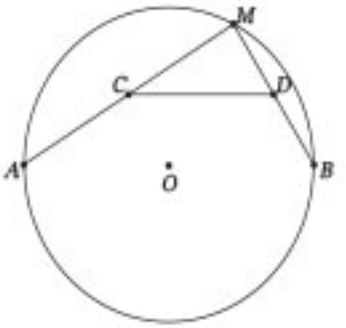
црт. 5

7. На слика 5 е даден дел од кружница што се гледа под агол од $\alpha = 58°$ од точка на кружницата. Под кој агол се гледа истиот дел од центарот на кружницата?



слика 5

8. Од точка M на една кружница $k(O, r)$ се повлечени две заемно нормални тетиви MA и MB (црт. 6). Растојанието меѓу средините C и D на тетивите е 2,5 cm. Пресметај го дијаметарот на кружницата.
Упатство: Примени го својството на средна линија во триаголник.



црт. 6

Истражување

Потребен прибор за работа: молив, клинци, и конец.
На едниот крај од конецот врзи го моливот, а на другиот врзи го клинецот. Нацртај точка O. Забоди го клинецот во точката O и со оптегнување на конецот нацртај кружница.
Избери точка A од кружницата и со истата постапка како претходно нацртај кружница со центар во A. Нека B е една од пресечните точки на двете кружници. Пак, како погоре, нацртај кружница со центар во B. Нека C е пресечната точка на третата со првата кружница, која е различна од A.
Што претставува отсечката AC за првата кружницата?
Избери точка D од првата кружница. Во точките A, C и D забоди клинци. Потоа оптегни конец околу забодените клинци. Колкав е аголот CDA?
Образложи го твојот одговор.

4. КОНСТРУКЦИИ НА НЕКОИ СПЕЦИЈАЛНИ ВИДОВИ ТРИАГОЛНИЦИ

Активност

Исо треба да направи прецизен цртеж на сообраќајниот знак во форма на рамностран триаголник со страна 3 cm (слика 1).

Помогни му на Исо да го конструира знакот.



слика 1

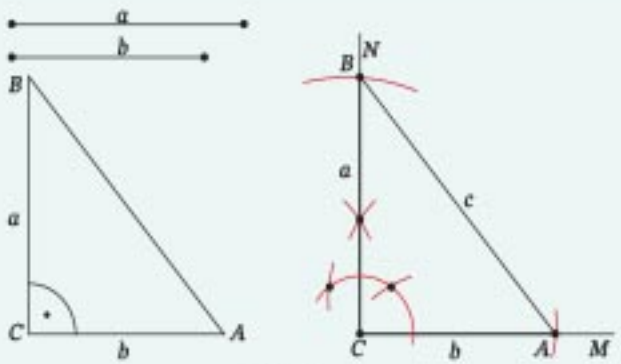
Конструкција на правоаголен триаголник со два дадени елементи

Да се потсетиме дека постапката на конструирање на триаголник започнува со цртање на **скица** на бараниот триаголник со слободна рака. Потоа, врз основа на скицата правиме **анализа** на врската меѓу дадените и останатите елементи на триаголникот. На крај, според анализата ги утврдуваме чекорите со кои ја изведуваме **конструкцијата** на триаголникот.

Пример 1

Конструирај правоаголен триаголник, ако се дадени катетите a и b.

На цртеж 1 е дадена скица на бараниот правоаголен триаголник ABC со катети a и b. Знаеме дека катетите кај правоаголен триаголник зафаќаат прав агол. Според тоа, конструкцијата се сведува на конструкција на триаголник со двете дадени страни и аголот меѓу нив. Таа се состои од следните чекори:



црт. 1

- цртаме полуправа CM каде што C е едно теме на триаголникот,
- на полуправата CM со шестар ја нанесуваме катетата b за да го добиеме темето A,
- конструираме прав агол со теме C и еден крак на полуправата CM,
- на другиот крак CN на правиот агол со шестар ја нанесуваме катетата a за да го добиеме темето B на триаголникот,
- со поврзување на темињата A и B ја добиваме третата страна на триаголникот ABC.

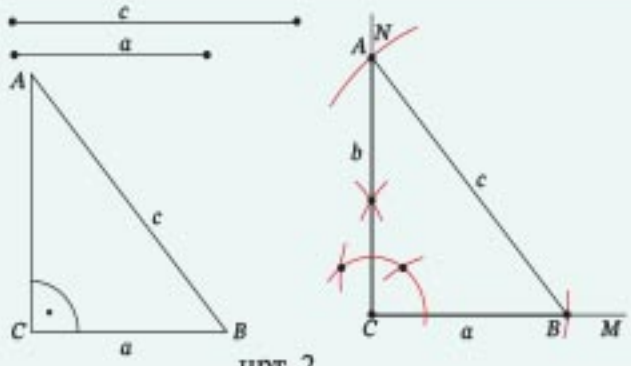
Задача 1

Конструирај правоаголен триаголник, ако се дадени катетите $a = 3{,}6$ cm и $b = 4{,}5$ cm.

Пример 2

Конструирај правоаголен триаголник, ако се дадени хипотенузата c и една катета a.

На цртеж 2 нацртани се со линијар катетите a и хипотенуза c. Исто така, направена е скица на бараниот правоаголен триаголник ABC со хипотенуза c и катета a.
Конструкцијата се состои од следните чекори:



црт. 2

- цртаме полуправа CM каде што C е едно теме на триаголникот,
- на полуправа CM со шестар ја нанесуваме катетата a за да го добиваме темето B,
- конструираме прав агол со теме C и еден крак на полуправата CM,
- го означуваме со CN другиот крак на правиот агол,
- го означуваме со A пресекот на кружниот лак со центар во B и радиус c со кракот CN,
- со поврзување на теминьата A и B ја добиваме третата страна на триаголникот ABC.

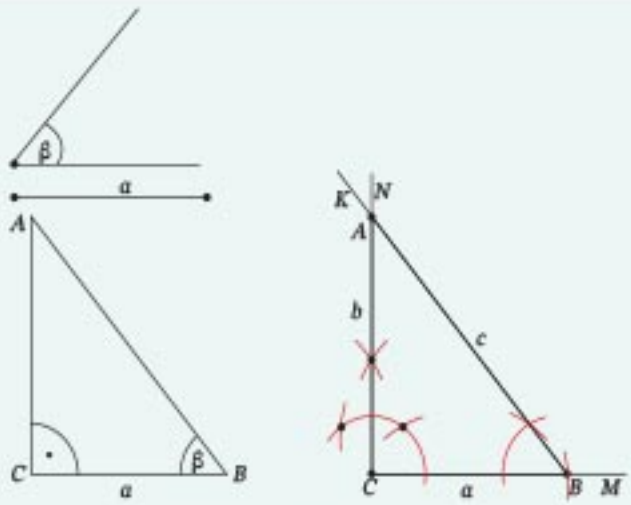
Задача 2

Конструирај правоаголен триаголник, ако се дадени хипотенузата $c = 7$ cm и катетата $b = 3{,}4$ cm.

Пример 3

Конструирај правоаголен триаголник, ако се дадени катетата a и аголот β.

Скицата на бараниот правоаголен триаголник ABC со катета a и агол β е дадена на цртеж 3.
Конструкцијата се состои од следните чекори:



црт. 3

- цртаме полуправа CM,
- на полуправа CM со шестар ја нанесуваме катетата a за да го добиеме темето B,
- конструираме прав агол со теме C,
- го означуваме со CN другиот крак на правиот агол,
- конструираме агол β во темето B и еден крак BC,
- го означуваме со BK другиот крак на аголот β,
- во пресекот на краците CN и BK го добиваме третото теме A на триаголникот ABC.

Задача 3

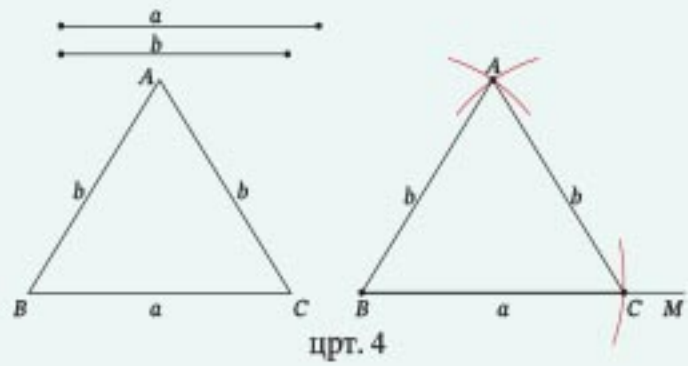
Конструирај правоаголен триаголник, ако се дадени хипотенузата $c = 5$ cm и аголот $\alpha = 60°$.

Конструкција на рамнокрак триаголник со два дадени елементи

Пример 4

Конструирај рамнокрак триаголник, ако се дадени основата a и кракот b.

Скицата на бараниот рамнокрак триаголник ABC со основа a и крак b е дадена на цртеж 4. Знаеме дека краците кај рамнокрак триаголник се еднакви. Според тоа, конструкцијата се сведува на конструкција на триаголник со три дадени страни.



црт. 4

Таа се состои од следните чекори:

- конструираме полуправа BM со почеток во темето B,
- на полуправа BM ја нанесуваме основата a за да го добиеме темето C,
- конструираме кружен лак со центар во B и радиус b,
- конструираме кружен лак со центар во C и радиус b,
- го означуваме со A пресекот на двата кружни лака (A е третото теме на триаголникот),
- го поврзуваме темето A со темињата B и C за да го добиеме триаголникот ABC.

Задача 4

Конструирај рамнокрак триаголник, ако се дадени кракот $b = 5$ cm и аголот при основата $\alpha = 45°$.

Пример 5

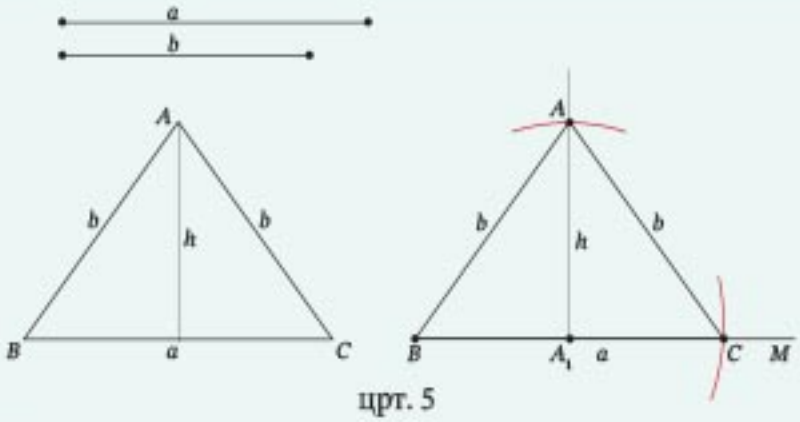
Конструирај рамнокрак триаголник, ако е дадена основата a и висината h што одговара на основата.

На цртеж 5 е дадена скица на бараниот рамнокрак триаголник ABC со основа a и висина h кон основата. Знаеме дека подножјето на висината кон основата на рамнокрак триаголник е средишна точка на основата.

Конструкцијата се состои од следните чекори:

- цртаме полуправа BM со почеток во темето B,

- на полуправата BM ја нанесуваме основата a за да го добиеме темето C,
- конструираме симетрала на отсечката BC,
- ја означуваме со A_1 пресечната точка на симетралата и отсечката BC,
- конструираме кружен лак со центар во A_1 и радиус h,
- ја означуваме со A пресечната точка на симетралата и кружниот лак,
- го поврзуваме темето A со темињата B и C за да го добиеме триаголникот ABC.



црт. 5

Задача 5

Конструирај рамнокрак триаголник, ако е даден кракот b и висината h спуштена кон основата.

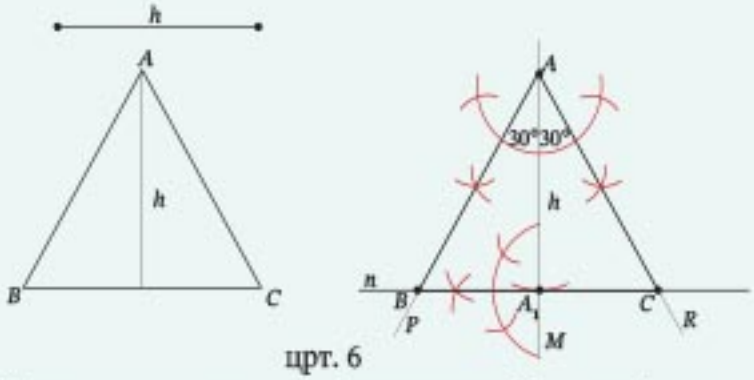
Конструкција на рамностран триаголник со дадена висина или со дадена тежишна линија

Пример 6

Конструирај рамностран триаголник, ако е дадена неговата висина h.

Скицата на бараниот рамностран триаголник ABC, со висината h спуштена од темето A, е дадена на цртеж 6. Конструкцијата се состои од следните чекори:

- цртаме полуправа AM со почеток во темето A,



црт. 6

- на полуправа AM, од темето A ја нанесуваме висината h, за да го добиеме нејзиното подножје A_1,
- конструираме два агли MAP и MAR од 30° (со теме во точката A, лево и десно од висината h),
- конструираме права n низ точката A_1 нормална на AA_1,
- ја означуваме со B пресечната точка на правата n и кракот AP,
- ја означуваме со C пресечната точка на правата n и кракот AR,
- бараниот триаголник е триаголникот ABC.

Пример 7

Конструирај рамностран триаголник ако е дадена неговата тежишна линија t.

Во рамностран триаголник тежишната линија се совпаѓа со висината. Според тоа, конструкцијата на рамностран триаголник со дадена тежишна линија се сведува на конструкција на рамностран триаголник со дадена висина.

Задача 6

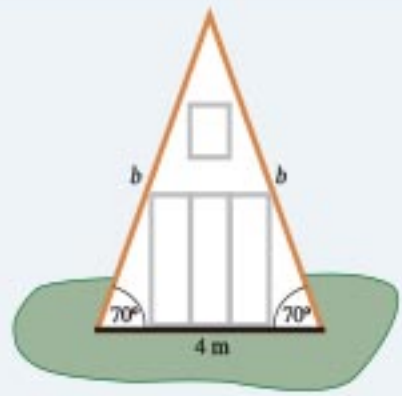
Конструирај рамностран триаголник ако е дадена неговата:
а) висина $h = 4$ cm, б) тежишна линија $t = 5$ cm.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Конструирај правоаголен триаголник ABC, ако се дадени:
   а) катетите $a = 3$ cm и $b = 4$ cm, б) хипотенузата $c = 6$ cm и катетата $b = 3$ cm.
2. Конструирај правоаголен триаголник ABC, ако се дадени:
   б) хипотенузата $c = 5{,}6$ cm и аголот $\alpha = 38°$, б) катетата $a = 4$ cm и аголот $\alpha = 40°$.
3. Конструирај рамнокрак триаголник ABC, ако се дадени:
   а) основата $a = 3{,}2$ cm и висината $h = 4{,}5$ cm,
   б) аголот при основата $\alpha = 58°$ и основата $a = 3$ cm.
4. Конструирај рамнокрак триаголник ABC, ако се дадени:
   а) аголот при врвот $\gamma = 46°$ и кракот $b = 5{,}2$ cm,
   б) кракот $b = 6{,}2$ cm и аголот при основата $\alpha = 73°$,
   в) висината кон основата $h_a = 5$ cm и аголот при врвот $\gamma = 48°$.
5. Конструирај рамностран триаголник ABC, ако е дадена:
   а) висината $h = 3{,}6$ cm, б) тежишната линија $t = 4{,}2$ cm.

Истражување

Куќата на слика 1 во основата има ширина 4 m, а покривот зафаќа агол од 70° со основата на куќата. Сафет нема скала, а треба да ја измери висината на куќата. Истражи и објасни како може со конструкција на триаголник во размер да ја дознае висината на куќата.



слика 1

5. ПОИМ ЗА СКЛАДНОСТ. СКЛАДНИ ТРИАГОЛНИЦИ

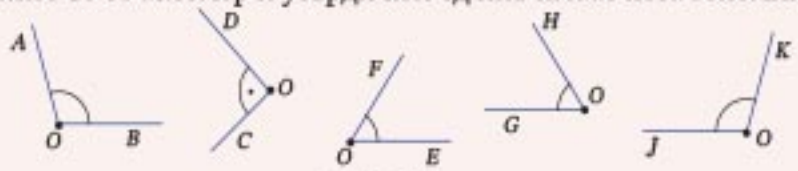
Поим за складност. Складни 2Д форми

Активност

1. а) Измери ги отсечките на цртеж 1а и спореди ги нивните должини. Што можеш да заклучиш?
   б) Каква е должината на отсечката AB во однос на отсечката EF?
2. Измери ги аглите на цртежот 1б со агломер и утврди кои од нив имаат иста големина.



црт. 1а



црт. 1б

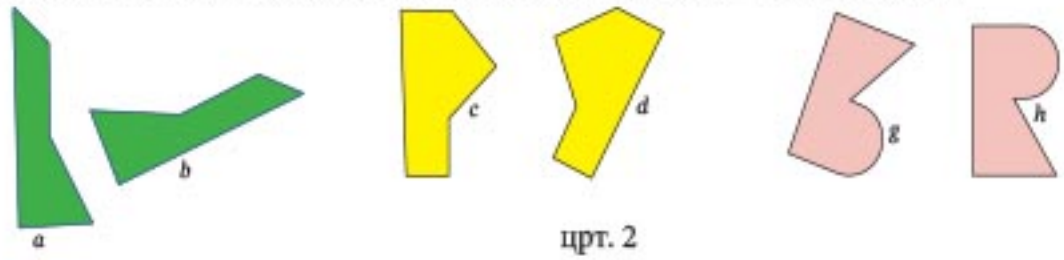
Отсечки кои имаат еднакви должини се викаат **складни отсечки**.
Агли кои имаат еднакви големини се викаат **складни агли**.

Со поместување на една отсечка до нејзината складна, или со поместување на еден агол до неговиот складен, овие геометриски форми се доведуваат до совпаѓање. Дали истото важи и за други геометриски форми? Во секојдневниот живот често зборуваме за складни форми. Притоа, подразбираме дека две форми се складни доколку имаат **иста форма** и **големина**. На пример такви се: листовите од топ хартија или од весник, шаблонот и неговата кројка, две монети од иста вредност и слично.

2Д форми кои можат да се доведат до совпаѓање една со друга се викаат **складни 2Д форми**.

За да ја означиме складноста на две форми го користиме знакот $\cong$. Со знакот $\ncong$ означуваме дека дадените форми не се складни.

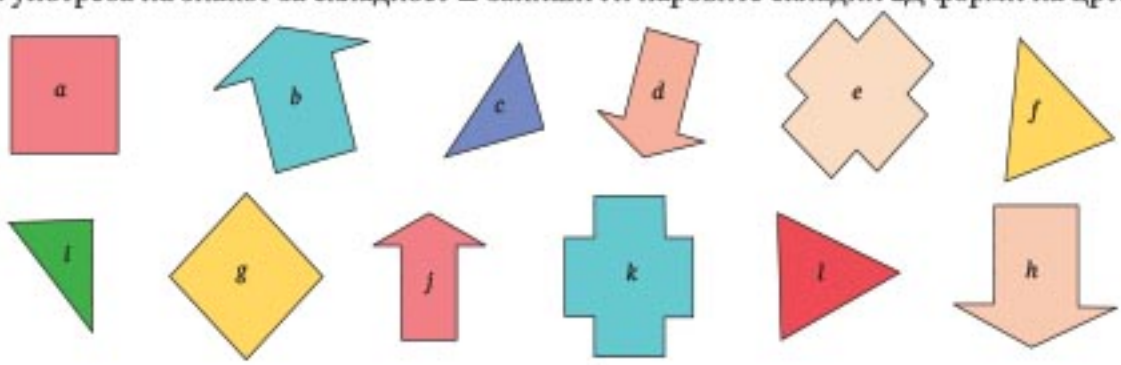
За паровите складни 2Д форми на цртеж 2 означуваме $a \cong b$, $c \cong d$ и $g \cong h$.



црт. 2

Задача 1

Со употреба на знакот за складност ≅ запиши ги паровите складни 2Д форми на цртеж 3.



црт. 3

Пример 1

Кој е условот:

а) два круга да бидат складни, б) два квадрати да бидат складни?

Тие ќе бидат складни ако имаат: а) еднакви радиуси, б) страни со еднакви должини.

Задача 2

Нацртај два складни правоаголници. Ако едниот правоаголник има страни 3 cm и 5 cm, колкави ќе бидат страните на другиот правоаголник?

Складни триаголници

Потсети се дека страните и аглите се основните елементи на триаголникот. Со оглед на тоа дека зборувавме за складни отсечки и агли, природно се поставува прашањето за складност на два триаголници.

Пример 2

Нацртај два триаголници и обележи ги како на цртеж 4.

а) Измери ги страните на двата триаголници. Спореди ги должините на страните: AB и FD, AC и FE, BC и DE.

б) Измери ги аглите на двата триаголници. Спореди ги големините на: $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle F$, $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle E$, $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle D$.

в) Потоа исечи ги двата триаголници и преклопи ги еден врз друг. Што заклучуваш, дали ќе се совпаднат еднаквите страни и еднаквите агли? Дали ќе се совпаднат двата триаголници?

г) Запиши ги паровите темиња, страни и агли кои се совпаднаа.



црт. 4

а) Ако мереше точно, сигурно доби дека: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FE}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE}$.

б) Од измерените агли забележа дека: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle FDE$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle FED$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DFE$.

в) Забележуваме дека се совпаднаа еднаквите страни и еднаквите агли:

AB и FD, AC и EF, BC и DE; $\sphericalangle ABC = \sphericalangle FDE$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle FED$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DFE$

Двата триаголници се совпаднаа. Притоа, темето A се совпадна со темето F, B со D и C со E.

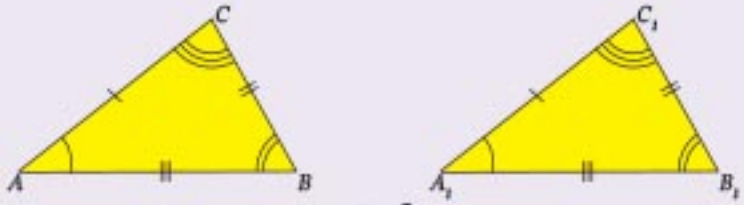
г) За точките, страните и аглите кои се совпаднаа велиме дека се **соодветни** едни на други. Во таа смисла велиме дека:

темето A е соодветно со темето F, B е соодветно со D и C е соодветно со E, страната AB е соодветна со страната FD, AC е соодветна со FE и BC е соодветна со DE, и аголот $\sphericalangle ABC$ е соодветен со аголот $\sphericalangle FDE$, $\sphericalangle ACB$ е соодветен со $\sphericalangle FED$ и $\sphericalangle BAC$ е соодветен со $\sphericalangle DFE$.

За триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ велиме дека се **складни**, ако имаат еднакви соодветни страни и еднакви соодветни агли (црт. 5), односно

$\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$, и

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$, $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B_1C_1A_1$.



црт. 5

Ако два триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ се складни запишуваме $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$. Се договараме, според редоследот на темињата во записите на двата триаголници, да ги читаме соодветните елементи.

Пример 3

Запиши ги паровите складни триаголници на цртеж 6.

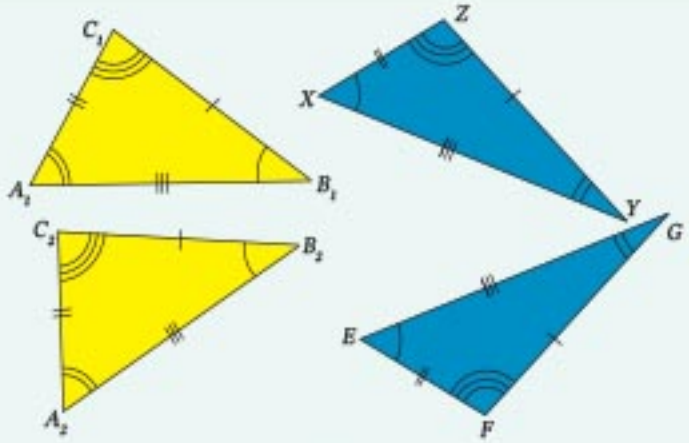
Темето A_1 е соодветно со темето A_2, B_1 со B_2 и C_1 со C_2.

Според ознаките на цртежот, соодветните страни се еднакви:

$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ (означени со по три цртички |||)

$\overline{A_1C_1} = \overline{A_2C_2}$ (означени со по две цртички ||)

$\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$ (означени со по една цртичка |)



црт. 6

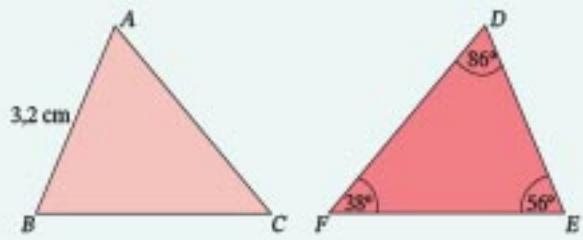
Слично, според ознаките на цртежот, соодветните агли се еднакви:
$\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle B_2A_2C_2$, $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_2B_2C_2$, $\sphericalangle B_1C_1A_1 = \sphericalangle B_2C_2A_2$.
Значи $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta A_2B_2C_2$.
На ист начин заклучуваме дека $\Delta XYZ \cong \Delta EGF$.

Пример 4

За триаголниците на цртеж 7 важи $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.
Според податоците на цртежот, најди ја:
а) должината на страната DE, б) големината на аголот во темето B.

Според условот во задачата имаме дека $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

а) Страната DE е соодветна на страната AB. Според тоа, тие имаат еднакви должини, односно $\overline{AB} = \overline{DE}$. Бидејќи $\overline{AB} = 3,2\,\text{cm}$, заклучуваме дека $\overline{DE} = 3,2\,\text{cm}$.

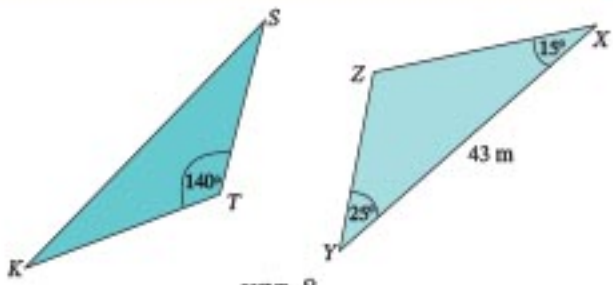


црт. 7

б) Аголот во темето B е соодветен на аголот во темето E. Според тоа, тие имаат еднакви големини, односно $\sphericalangle CBA = \sphericalangle FED$. Бидејќи $\sphericalangle FED = 56°$, заклучуваме дека $\sphericalangle CBA = 56°$.

Задача 3

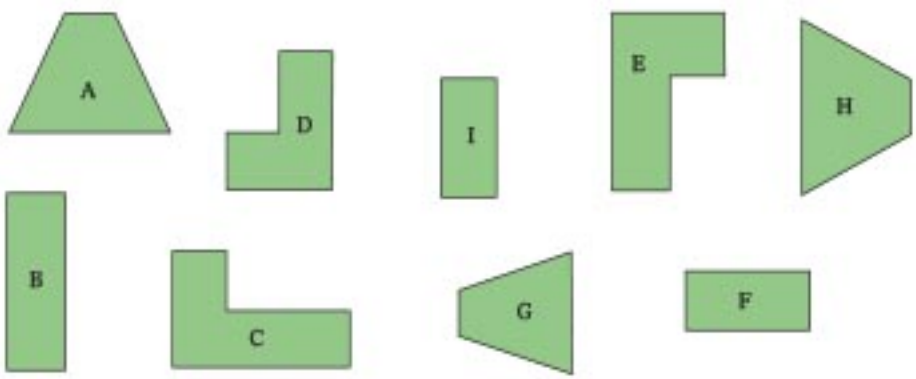
За триаголниците на цртеж 8 важи $\Delta KST \cong \Delta XYZ$. Според податоците на цртежот, пресметај ја
а) должината на страната KS,
б) големината на аголот во темето S.



црт. 8

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

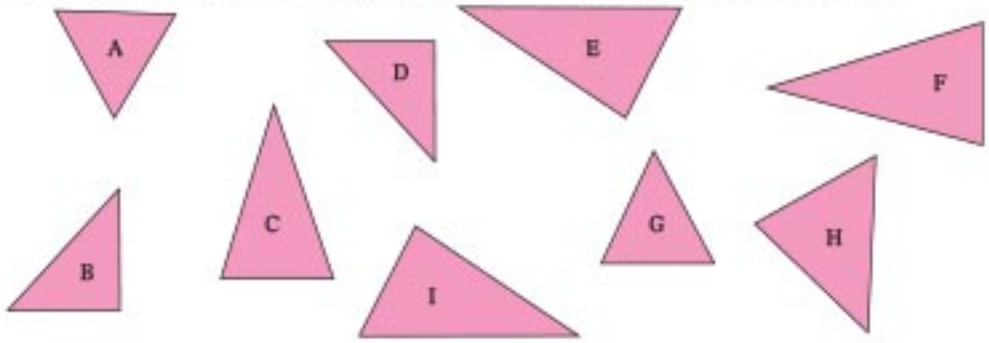
1. Запиши ги паровите складни 2Д форми што ги гледаш на цртеж 9.



црт. 9

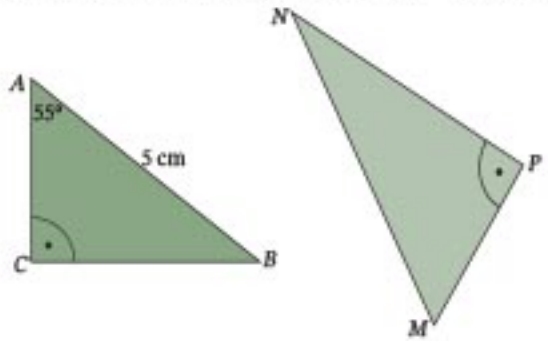
2. Познато е дека $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Запиши ги паровите соодветни:
а) темиња, б) страни на триаголниците ABC и DEF.

3. Запиши ги паровите складни триаголници кои ги гледаш на цртеж 10.

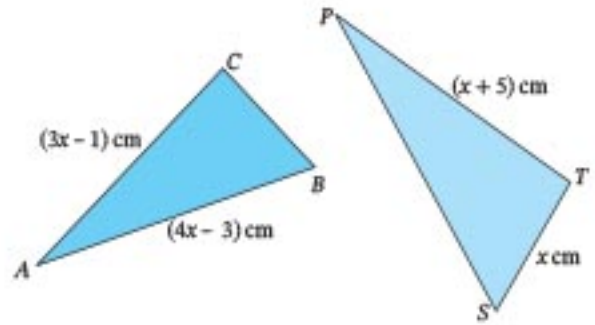


црт. 10

4. Познато е дека $\Delta ABC \cong \Delta MNP$. Според податоците на цртеж 11, најди ја
а) должината на страната MN, б) големината на аголот во темето N.



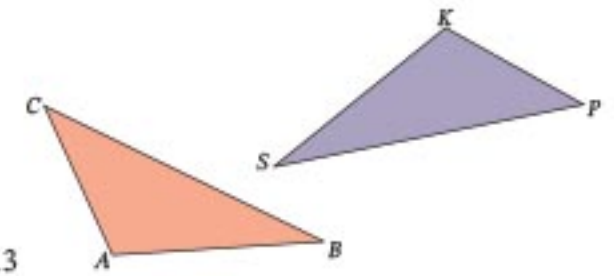
црт. 11



црт. 12

5. Познато е дека $\Delta ABC \cong \Delta PST$. Според податоците на цртеж 12, најди ја должината на секоја од страните на триаголниците.

6. Познато е дека $\Delta ABC \cong \Delta KSP$ (црт. 13).
Пресметај ја големината на аголот KSP,
ако $\sphericalangle BAC = 138^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 26^\circ$.



црт. 13

Истражување

Нека во множеството од сите 2Д форми е зададена релацијата R „ ... е складна со ... “.
Испитај дали релацијата R е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

6. ПРИЗНАЦИ ЗА СКЛАДНОСТ НА ТРИАГОЛНИЦИ

За да провериме дали два триаголници се складни, треба да провериме дали може да се доведат до совпаѓање, односно поклопување. Но природно се наметнува прашањето дали тоа секогаш е реално можно. На пример, на овој начин не можеме провериме две парцели со форма на триаголник се складни, бидејќи не можеме да ги доведеме до совпаѓање. Затоа користиме други начини за утврдување на складност на триаголниците, наречени **признаци за складност на триаголници**. Во нив се определени условите за утврдување на складноста на дадени триаголници. Постојат **три основни признаци за складност на триаголници**.

Прв признак за складност на триаголници

Активност

Страните на еден триаголник се долги 3 cm и 5 cm, а аголот помеѓу нив е 102°. Колку вакви триаголници можеш да нацрташ? Образложи го одговорот.

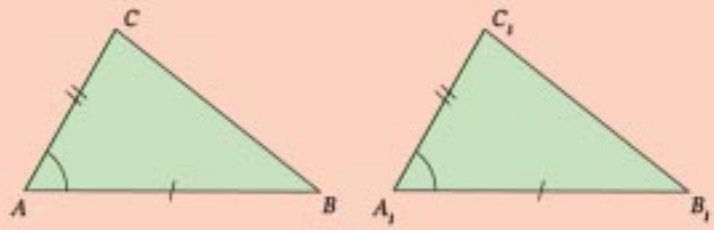
Два триаголници се складни ако две страни и аголот меѓу нив од едниот триаголник се еднакви со соодветните две страни и аголот меѓу нив на другиот триаголник (црт. 1).

C: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$,

A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$

C: $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$

CAC: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

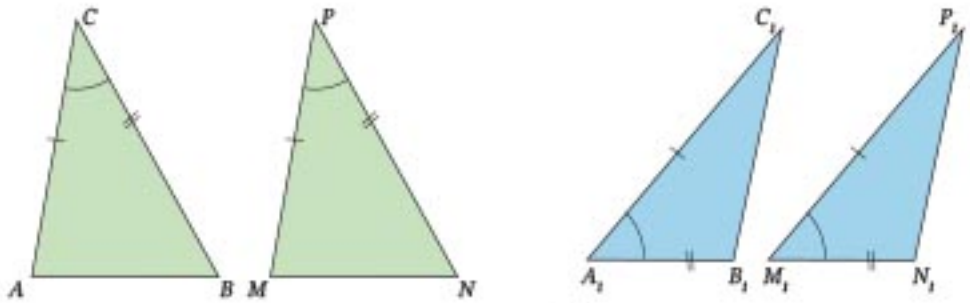


црт. 1

Според овој признак, за да утврдиме складност на два триаголници вршиме проверка на еднаквоста на две страни и аголот меѓу нив од едниот триаголник со соодветните елементи на другиот триаголник. Затоа, признакот се вика **страна – агол – страна** и накусо се означува со **CAC**.

Пример 1

На цртеж 2 се нацртани парови триаголници и означени се соодветните елементи. Со помош на признакот CAC, утврди дека триаголниците се складни:



црт. 2

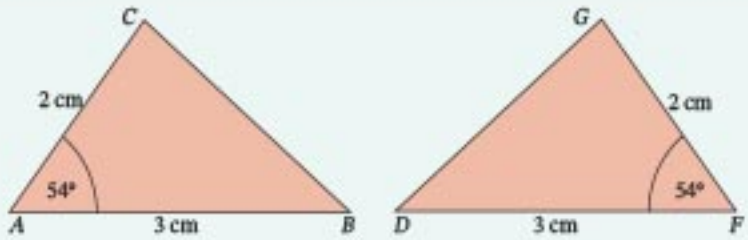
C: $\overline{AC} = \overline{MP}$
A: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MPN$
C: $\overline{CB} = \overline{PN}$
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta MNP$

C: $\overline{A_1B_1} = \overline{M_1N_1}$
A: $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle N_1M_1P_1$
C: $\overline{A_1C_1} = \overline{M_1P_1}$
CAC: $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta M_1N_1P_1$

Пример 2

Провери дали триаголниците на цртеж 3 се складни.

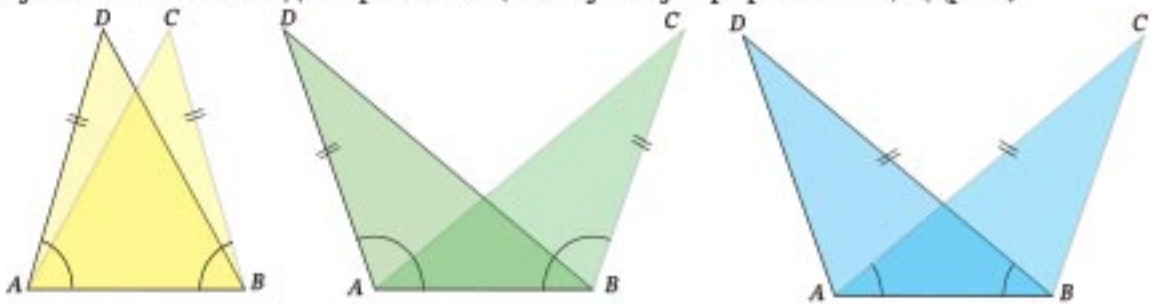
C: $\overline{AB} = \overline{FD} = 3$ cm
A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DFG = 54°$
C: $\overline{AC} = \overline{FG} = 2$cm
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta FDG$



црт. 3

Пример 3

Објасни зошто се складни триаголниците кај секој пар триаголници (црт. 4):



црт. 4

C: AB е заедничка страна
A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$
C: $\overline{BC} = \overline{AD}$
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

C: AB е заедничка страна
A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$
C: $\overline{BC} = \overline{AD}$
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

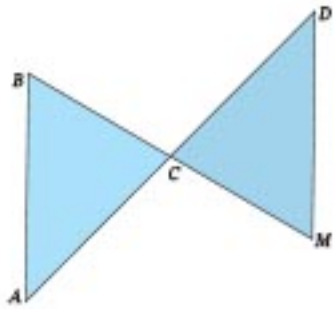
C: AB е заедничка страна
A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD$
C: $\overline{AC} = \overline{BD}$
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

Пример 4

Разгледај ја 2Д формата на цртеж 5.

Точката C е средишна точка за отсечките AD и BM.
Објасни зошто $\Delta ABC \cong \Delta DMC$.

C: $\overline{AC} = \overline{DC}$ C е средишна точка за отсечката AD.
A: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCM$ Како накрсни агли.
C: $\overline{BC} = \overline{MC}$ C е средишна точка за отсечките BM.
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta DMC$.



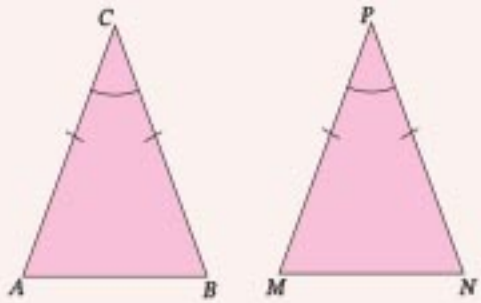
црт. 5

Активност

Разгледај ги триаголниците на цртеж 6а и цртеж 6б. Што е доволно за да може да утврдиме дека:
а) два правоаголни триаголници се складни,
б) два рамнокраки триаголници се складни?



црт. 6а



црт. 6б

- Два **правоаголни триаголници** се складни ако катетите на едниот триаголник се еднакви со соодветните катети на другиот триаголник.
- Два **рамнокраки триаголници** се складни ако кракот и аголот при врвот на едниот триаголник се еднакви со кракот и аголот при врвот на другиот триаголник.

Пример 5

Во рамнокрак триаголник MPQ спуштена е висината од темето P кон основата MQ (црт. 7). Провери дали $\Delta MNP \cong \Delta QNP$.

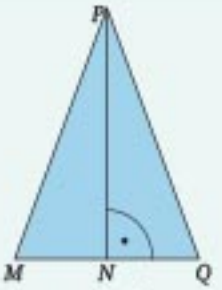
За триаголниците MNP и QNP важат следните услови:

C: PN е заедничка страна.

A: $\sphericalangle MNP = \sphericalangle QNP = 90°$ Висината е нормална на основата.

C: $\overline{NM} = \overline{NQ}$ Висината ја дели основата на два еднакви дела.

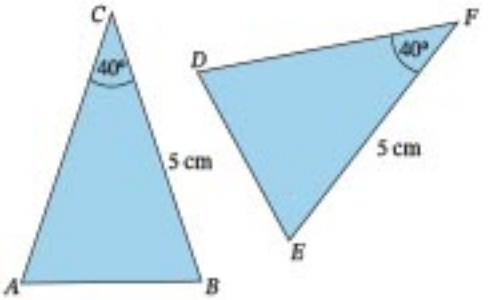
CAC: $\Delta MNP \cong \Delta QNP$



црт. 7

Задача 1

Објасни зошто рамнокраките триаголници ABC и DEF се складни (црт. 8).



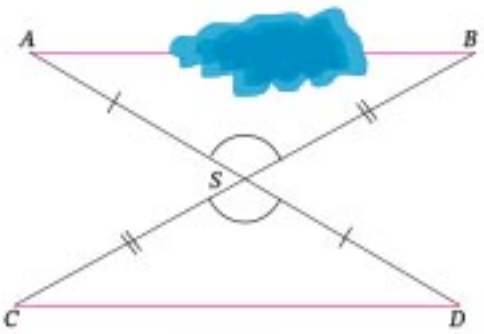
црт. 8

Задача 2

Геодетот на теренот, што е даден на цртеж 9, треба да го измери растојанието меѓу точките A и B. Меѓу нив има една бара што го попречува мерењето на бараното растојание. Како геодетот со помош на признакот CAC ќе го определи тоа растојание?
Упатство: Разгледај го цртеж 10 и објасни зошто геодетот може да го измери растојанието меѓу точките C и D наместо растојанието меѓу точките A и B (црт. 10).



црт. 9

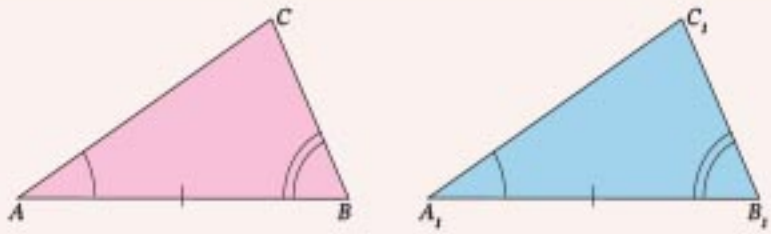


црт. 10

Втор признак за складност на триаголници АСА

Активност

1. На цртеж 11 дадени се два триаголника за кои е познато дека имаат по една страна со еднаква должина, а соодветните агли кои лежат на таа страна се еднакви. Измери ги внимателно и спореди ги соодветните елементи на дадените триаголници. Дали триаголниците се складни?



црт. 11

2. Нацртај триаголник со произволни должини на страните и големини на аглите. Потоа на прозирна хартија нацртај друг триаголник за кој една страна и аглите што лежат на неа ќе бидат еднакви со една страна и соодветните агли на другиот триаголник.

а) Дали триаголниците се совпаѓаат? б) Дали триаголниците се складни?

Ако правилно работеше, во претходните две активности согледа дека триаголниците се складни.

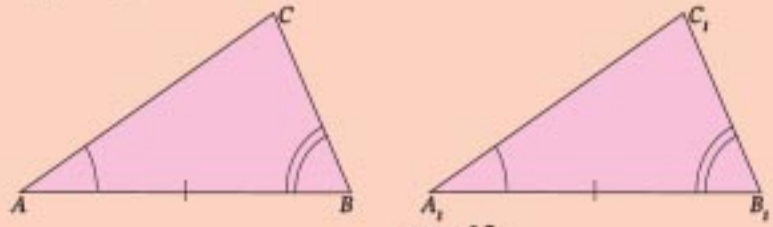
Два триаголници се складни ако една страна и аглите што лежат на таа страна од едниот триаголник се еднакви со соодветната страна и аглите што лежат на таа страна од другиот триаголник (црт. 12).

A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$

C: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$

A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$

ACA: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

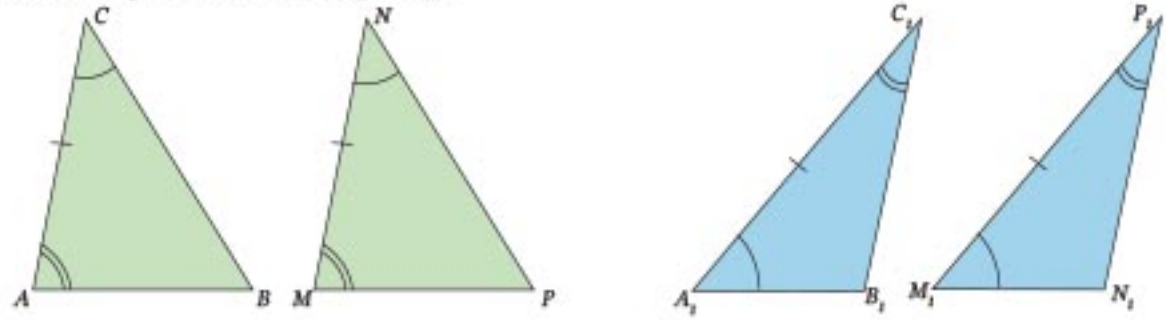


црт. 12

Признакот е наречен **агол – страна – агол** и накратко се означува со **ACA**, бидејќи за да утврдиме складност на два триаголници вршиме проверка на еднаквоста на една страна и аглите што лежат на таа страна од едниот триаголник со соодветните елементи на другиот триаголник.

Пример 6

Со помош на признакот ACA, запиши ги складните триаголници и утврди зошто се складни триаголниците (црт. 13):



црт. 13

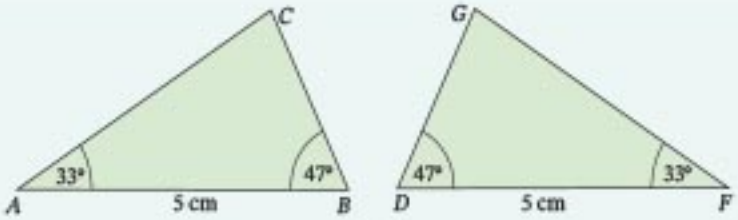
A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle PMN$
C: $\overline{AC} = \overline{MN}$
A: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MNP$
ACA: $\Delta ABC \cong \Delta MPN$

A: $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle N_1M_1P_1$
C: $\overline{A_1C_1} = \overline{M_1P_1}$
A: $\sphericalangle A_1C_1B_1 = \sphericalangle M_1P_1N_1$
ACA: $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta M_1N_1P_1$

Пример 7

Утврди дали триаголниците на цртеж 14 се складни.

A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DFG = 33°$,
C: $\overline{AB} = \overline{DF} = 5\,\text{cm}$,
A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle FDG = 47°$.
ACA: $\Delta ABC \cong \Delta FDG$.



црт. 14

Задача 3

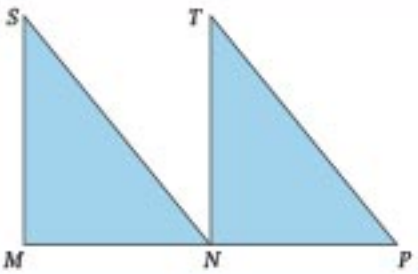
На цртеж 15 е даден паралелограм $KLMJ$ во кој е повлечена дијагоналата KM. Дали триаголниците KLM и MJK се складни? Образложи го одговорот.



црт. 15

Пример 8

За 2Д формата на цртеж 16 се дадени следните услови:
$\overline{MN} = \overline{NP}$, $\sphericalangle SMN = \sphericalangle TNP$ и $SN \parallel TP$.
Објасни зошто $\Delta SMN \cong \Delta TNP$.



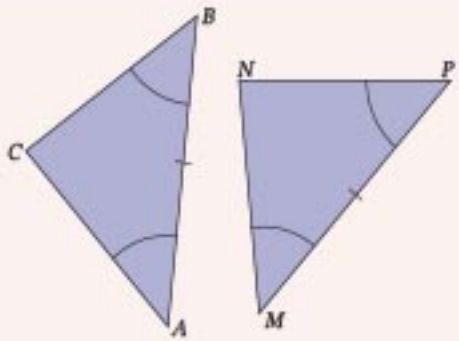
црт. 16

A: $\sphericalangle SMN = \sphericalangle TNP$ — Според услов во задачата.
C: $\overline{MN} = \overline{NP}$ — Според услов во задачата.
A: $\sphericalangle MNS = \sphericalangle NTP$ — Аглите имаат заемно паралелни краци заради условот $SN \parallel TP$.
ACA: $\Delta SMN \cong \Delta TNP$.

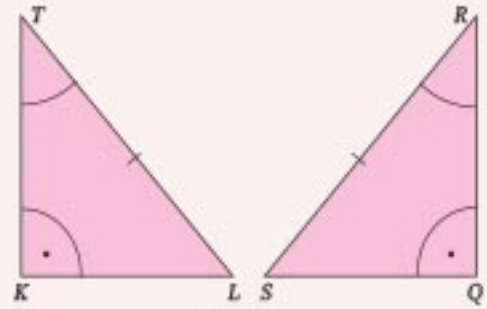
Активност

а) Дали може да се утврди складност на рамнокраките триаголници ABC со MPN, ако им се еднакви означените елементи на цртеж 17?

б) Зошто правоаголните триаголници KLT и QSR на цртеж 18 се складни?



црт. 17

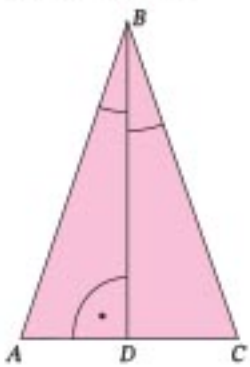


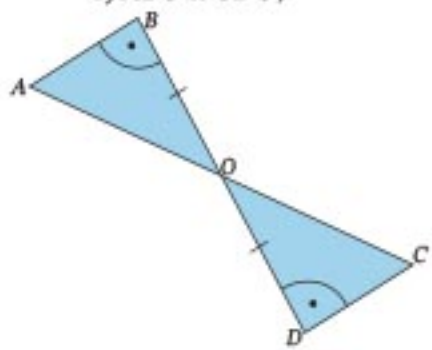
црт. 18

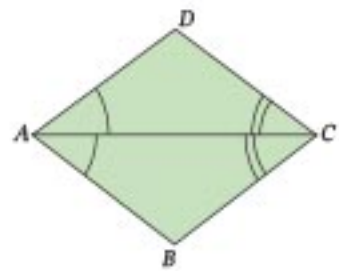
- **Два правоаголни триаголници** се складни, ако една катета и остриот агол на неа од едниот триаголник се еднакви со соодветната катета и остриот агол на неа од вториот триаголник.
- **Два правоаголни триаголници** се складни, ако хипотенузата и еден остар агол од едниот триаголник се еднакви со хипотенузата и соодветниот остар агол од другиот триаголник.
- **Два рамнокраки триаголници** се складни, ако основата и аголот што лежи на неа од едниот триаголник се еднакви со основата и аголот што лежи на неа од вториот триаголник.

Задача 4

Објасни ја складноста на триаголниците на цртеж 19:
а) ADB и CDB, б) ABO и CDO, в) ABC и ADC.



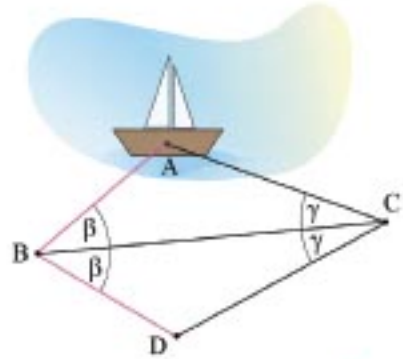




црт. 19

Задача 5

Како ќе го одредиме растојанието меѓу чамецот и колибата на брегот што се наоѓа во точката B, користејќи го вториот признак за складност на триаголници?
Упатство: Разгледај го цртеж 20 и објасни зошто наместо да го мериме растојанието од A до B можеме да го мериме растојанието од B до D.



црт. 20

Трет признак за складност на триаголници ССС

Активност

Колку триаголници можеш да нацрташ, ако должините на неговите страни се 4 cm, 6 cm и 7 cm, соодветно? Нацртај таков триаголник.

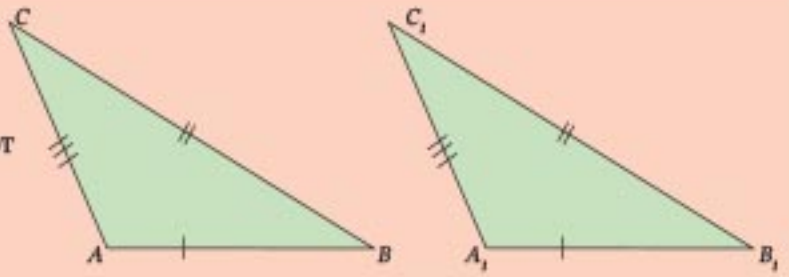
Два триаголници се складни ако трите страни на едниот триаголник се еднакви со соодветните страни на другиот триаголник (црт. 21).

C: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$

C: $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$

C: $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$

ССС: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$



црт. 21

Признакот е наречен **страна – страна – страна**, накусо **ССС**, бидејќи определува услови за складност на два триаголници преку проверка на должините на трите страни на едниот триаголник со соодветните страни на другиот триаголник.

Пример 9

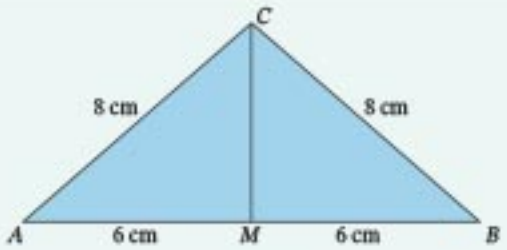
Утврди ја складноста на триаголниците AMC и BMC на цртеж 22.

C: $\overline{AM} = \overline{BM}$

C: $\overline{AC} = \overline{BC}$

C: MC е заедничка страна.

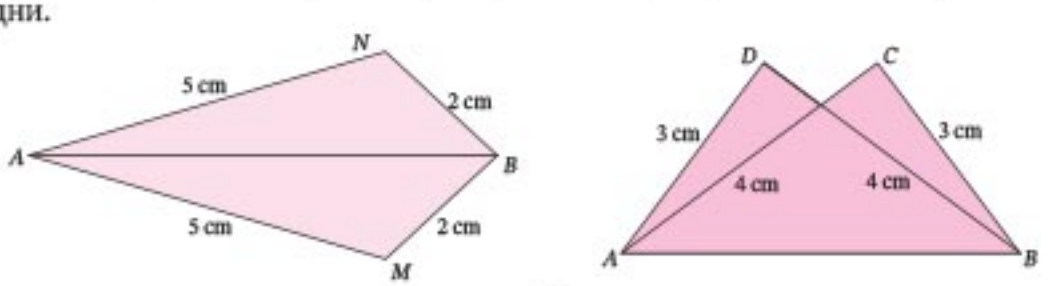
ССС: $\Delta AMC \cong \Delta BMC$



црт. 22

Задача 6

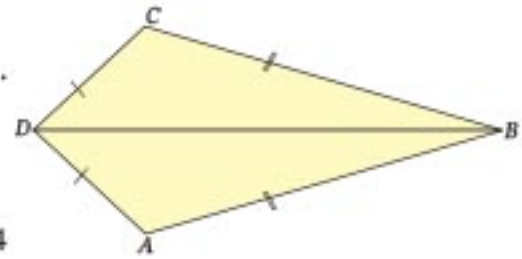
2Д формите на цртеж 23 содржат по два триаголници. Објасни зошто тие триаголници се складни.



црт. 23

Пример 10

Според означените страни на четириаголникот $ABCD$ на цртеж 24, објасни зошто $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DAB$.



црт. 24

C: $\overline{DA} = \overline{DC}$

C: $\overline{AB} = \overline{CB}$

C: DB е заедничка страна.

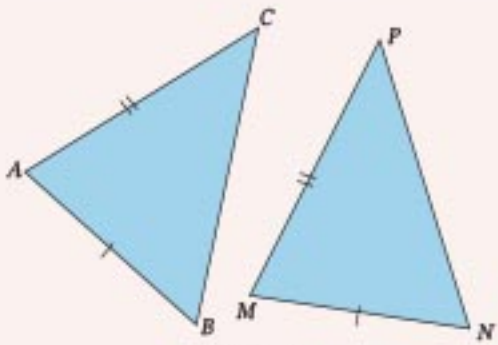
CCC: $\Delta DAB \cong \Delta DCB$

Бидејќи аголот DAB е соодветен на аголот DCB, заклучуваме дека $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$.

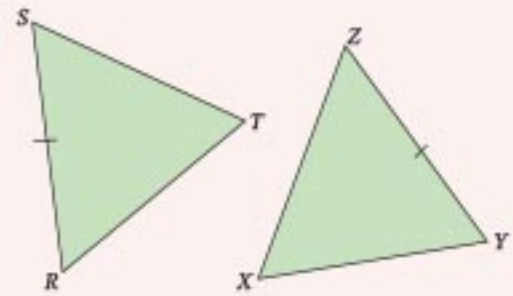
Активност

а) Дали може да се утврди складност на рамнокраките триаголници ABC (со основа AB) со MNP (со основа MN), ако им се еднакви означените елементи на цртеж 25?

б) Зошто рамностраните триаголници RST и XYZ на цртеж 26 се складни?



црт. 25



црт. 26

- **Два рамнокраки триаголници** се складни, ако основата и кракот на едниот триаголник се еднакви со основата и кракот на вториот триаголник.
- **Два рамностран триаголници** се складни, ако тие имаат еднакви страни.

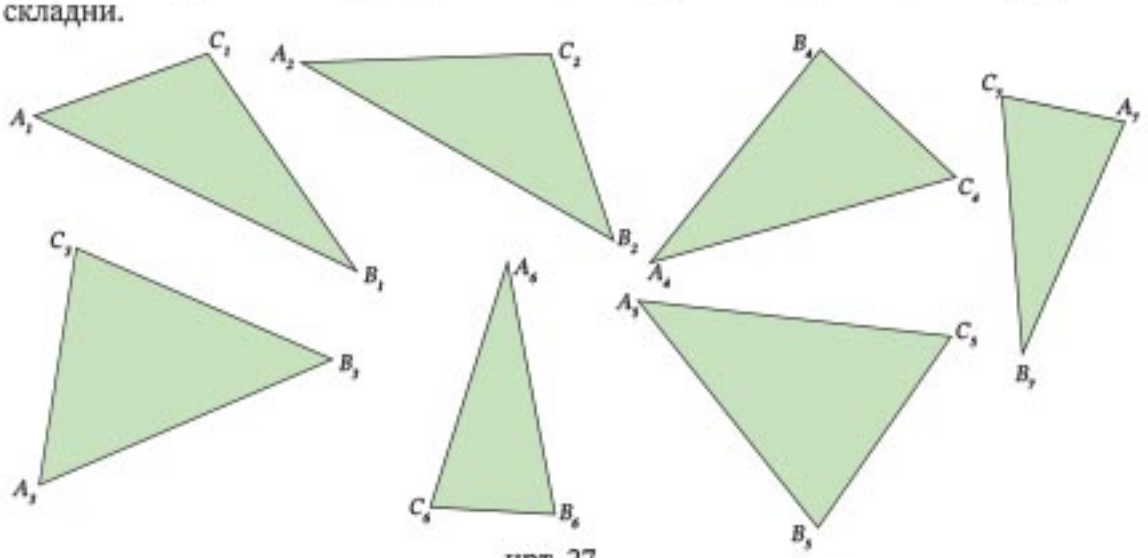
Задача 7

Во рамнокрак триаголник ABC од врвот C е спуштена тежишната линија CC_1. Објасни зошто $\sphericalangle AC_1C = \sphericalangle BC_1C$. Направи цртеж.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

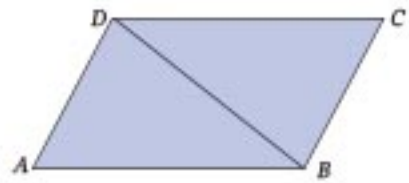
1. Според дадените услови одреди дали се складни триаголниците, ако
а) двата триаголници имаат соодветни страни со должина 3 cm и два соодветни агла со големини 35^0 и 80^0,
б) двата триаголници имаат соодветни страни со должини 3 cm, 9 cm и 10 cm.
в) двата триаголници имаат соодветни агли со големини 44^0, 78^0 и 58^0.

2. Запиши ги паровите складни триаголници на цртеж 27 и признаците според кои се складни.



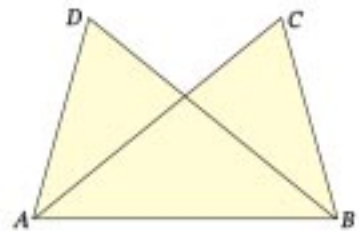
црт. 27

3. Отсечката BD е дијагонала на паралелограмот $ABCD$ (црт. 28).
Објасни зошто $\Delta ABD \cong \Delta CDB$.



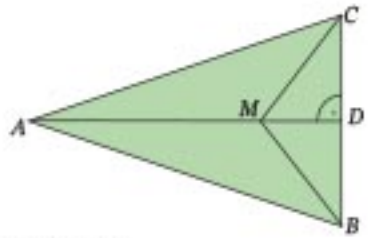
црт. 28

4. За 2Д формата на цртеж 29 важи: $\overline{AC} = \overline{BD}$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD$.
Објасни зошто: а) $\overline{AD} = \overline{BC}$ б) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.



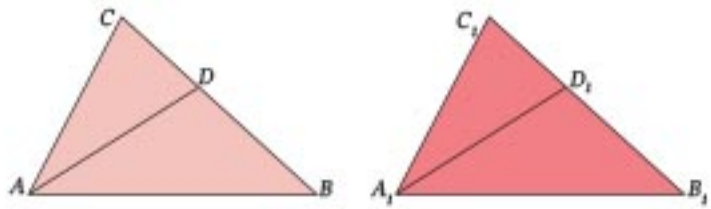
црт. 29

5. За 2Д формата на цртеж 30 важи: $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM$ и $\sphericalangle BMA = \sphericalangle CMA$.
Објасни зошто $\Delta ABM \cong \Delta ACM$.



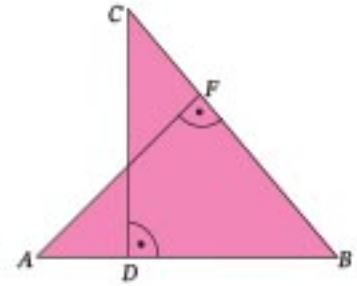
црт. 30

6. За триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ на цртеж 31 се дадени условите:
1) $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$
2) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$
3) AD и A_1D_1 се симетрали на агли во темињата A и A_1
4) $\overline{AD} = \overline{A_1D_1}$
Објасни зошто $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$



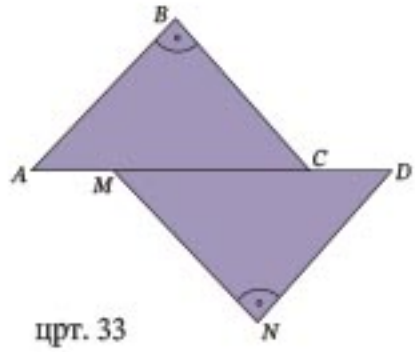
црт. 31

7. За 2Д формата на цртеж 32 важи $\overline{AB} = \overline{BC}$.
Објасни зошто $\overline{AF} = \overline{CD}$.



црт. 32

8. За 2Д формата на цртеж 33 важи:
$BC \parallel MN$ и $\overline{AB} = \overline{ND}$.
Објасни зошто $\Delta ABC \cong \Delta DNM$.

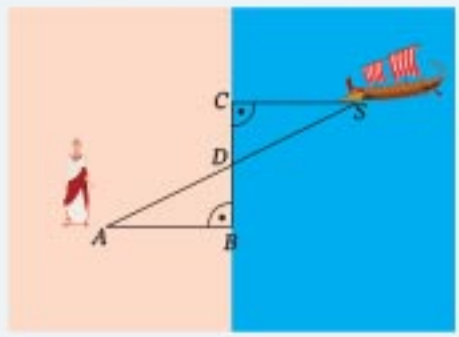


црт. 33

9. Објасни зошто во рамнокракиот триаголник:
а) тежишните линии повлечени кон краците на триаголникот се еднакви,
б) висините повлечени кон краците на триаголникот се еднакви.
Направи цртеж.

Истражување

Старогрчкиот математичар Талес (624 година п.н.е. – 547 годона п.н.е.) успеал да ја одреди оддалеченоста на непријателските бродови од брегот за време на војна.
Од точката C на брегот што се наоѓа спротивно од бродот, одел (под прав агол) долж брегот на некое произволно растојание (на пример, 20 чекори) до точката D, каде што поставил стап и продолжил по истата линија за еднакво растојание (20 чекори) до точката B. Потоа, се движел под прав агол навнатре по копното до точката A од која можел да го насочи погледот кон бродот преку стапот.



Објасни како Талес го одредил растојанието до бродот, кое растојание го измерил? Зошто измереното растојание е еднакво на растојанието меѓу бродот и брегот? Методот, кој му се припишува на Талес од Милет, се користел и за утврдување на ширина на река, ширина на карпа и слично.

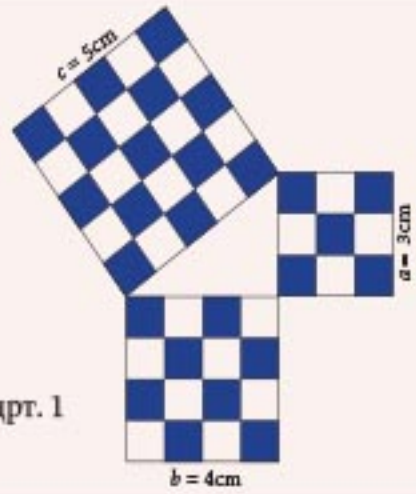
7. ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА

Активност

Даден е правоаголен триаголник со катети 3 cm и 4 cm и хипотенуза 5 cm (црт. 1). Секој од квадратите е поделен на квадратчиња со страна 1 cm.

а) Колку квадратчиња има секој квадрат?

б) Дали постои врска меѓу збирот на квадратчињата над катетите и бројот на квадратчиња над хипотенузата?



црт. 1

Сигурно забележа дека постои врска меѓу збирот на квадратчињата над катетите и бројот на квадратчиња над хипотенузата. Имено, бројот на квадратчиња над:

катетата долга 3 cm изнесува $3^2 = 9$,

катетата долга 4 cm изнесува $4^2 = 16$, и

хипотенузата долга 5 cm изнесува $5^2 = 25$.

Тоа значи дека збирот од бројот на квадратчиња над катетите е еднаков на бројот на квадратчиња над хипотенузата, односно $9 + 16 = 25$.

Својството што го согледа важи за секој правоаголен триаголник и познато е под името Питагорова теорема, посветено на античкиот математичар **Питагора**.

Питагорова теорема

Во секој правоаголен триаголник квадратот на хипотенузата е еднаков на збирот на квадратите на катетите.

Според тоа, во правоаголен триаголник врската меѓу катетите a и b и хипотенуза c е определена со формулата

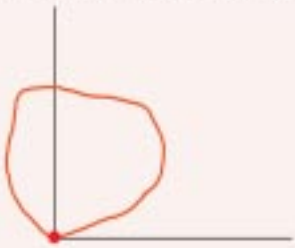
$c^2 = a^2 + b^2$.

Активност

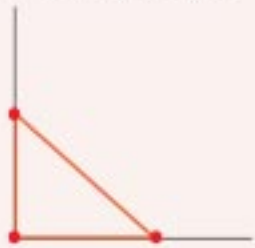
За активноста ќе ти биде потребно: лист хартија, парче стиропор (квадрат со страни околу 10 cm), ластиче и 3 иглички со топчиња за прицврстување материјали од хартија на стиропор.

Подготовка: На листот хартија нацртај прав агол. Закачи го листот за стиропорот со забодување на една од игличките во темето на правиот агол (црт. 2а).

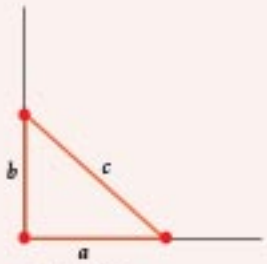
Потоа закачи го ластичето за таа игличка. Со другите две повлечи го ластичето и закачи го на секој од краците на аголот (црт. 2б). Измери ги должините на катетите a, b и хипотенузата c (црт. 2в) и провери дали за нив важи $a^2 + b^2 = c^2$. Премести ги двете иглички долж краците, повторно измери и провери.



црт. 2а



црт. 2б



црт. 2в

Пример 1

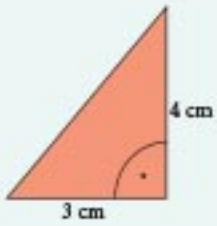
Пресметај ја должината на хипотенузата во правоаголен триаголник, ако се дадени катетите:

а) $a = 3$ cm и $b = 4$ cm, б) $a = 8$ cm и $b = 10$ cm.

Во пресметките користиме дигитрон и резултатот ќе го заокружуваме на две децимални места.

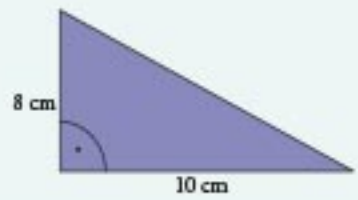
Според Питагоровата теорема за хипотенузата c добиваме:

а)



$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 3^2 + 4^2$
$c^2 = 9 + 16$
$c^2 = 25$
$c = \sqrt{25}$
$c = 5$ cm

б)



$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 10^2 + 8^2$
$c^2 = 100 + 64$
$c^2 = 164$
$c = \sqrt{164}$
$c = 12{,}81$ cm

Да забележиме дека при пресметување на хипотенузата, наместо формулата $c^2 = a^2 + b^2$, можеме непосредно да ја користиме изведената формула

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Задача 1

Пресметај ја должината на хипотенузата c на правоаголниот триаголник ако се дадени катетите: а) $a = 24$ cm и $b = 7$ cm, б) $a = 12$ cm и $b = 13$ cm.

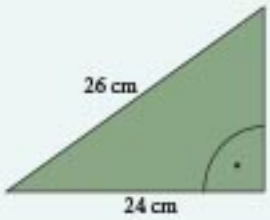
Со помош на Питагоровата теорема можеме да ја определиме должината на едната катета, ако се дадени хипотенузата и другата катета.

Пример 2

Пресметај ја должината на едната катета на правоаголен триаголник, ако се дадени хипотенузата и катетата: а) $c = 26$ cm $a = 24$ cm, б) $b = 27$ cm и $c = 50$ cm.

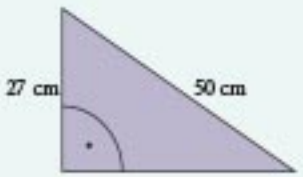
Според Питагоровата теорема за непознатата катета добиваме:

а)



$c^2 = a^2 + b^2$
$26^2 = 24^2 + b^2$
$676 = 576 + b^2$
$b^2 = 676 - 576$
$b^2 = 100$
$b = \sqrt{100}$
$b = 10$ cm

б)



$c^2 = a^2 + b^2$
$50^2 = a^2 + 27^2$
$2500 = a^2 + 729$
$a^2 = 2500 - 729$
$a^2 = 1771$
$a = \sqrt{1771}$
$a = 42{,}08$ cm

Да забележиме дека при пресметувањето на непознатата катета, наместо формулата $c^2 = a^2 + b^2$, можеме непосредно да ги користиме изведените формули:

$a^2 = c^2 - b^2$ или $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ и $b^2 = c^2 - a^2$ или $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Задача 2

Пресметај ја должината на едната катета на правоаголен триаголник ако се дадени хипотенузата и другата катета: а) $c = 15$ cm и $a = 11$ cm, б) $c = 50$ cm и $b = 30$ cm.

Пример 3

Тања оди пеш до училиште. Најпрво поминува 180 m од нејзината улица, а потоа скршнува за агол од 90° и оди уште 240 m до училиштето (црт. 3).
Колку изнесува должината на отсечката чии крајни точки се домот на Тања и училиштето?



црт. 3

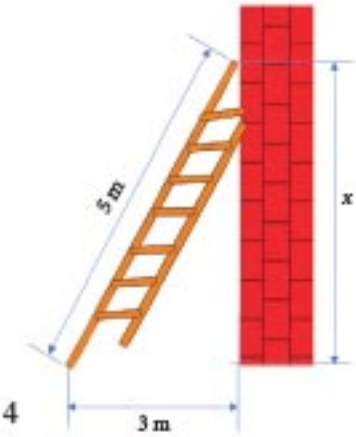
Тања оди по две катети $a = 180$ m и $b = 240$ m на правоаголен триаголник. Растојанието од домот на Тања до училиштето е хипотенузата c на тој триаголник. Со примена на Питагоровата теорема добиваме

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{180^2 + 240^2} = c = \sqrt{32\,400 + 57\,600} = \sqrt{90\,000} = 300\,\text{m}.$$

Должината на отсечката чии крајни точки се домот на Тања и училиштето е 300 m.

Задача 3

Скала долга 5 m е потпрена на вертикален ѕид (црт. 4).
Подножјето на скалата е оддалечено 3 m од ѕидот.
На која висина од земјата скалата го допира ѕидот?



црт. 4

Важи и обратното својство од Питагоровата теорема.

Обратна Питагорова теорема

Ако квадратот на најдолгата страна на еден триаголник е еднаков на збирот од квадратите на другите две страни, тогаш тој триаголник е правоаголен.

Со помош на обратната Питагорова теорема можеме да утврдиме дали еден триаголник е правоаголен.

Пример 4

Провери дали е правоаголен триаголникот со страни:
а) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm и $c = 5$ cm, б) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, $c = 13$ cm.

а) Според обратната Питагорова теорема, триаголникот е правоаголен, бидејќи:
$5^2 = 3^2 + 4^2$.
Овој триаголник им бил познат уште на старите Египќани, па затоа тој го добил името **египетски триаголник**.
б) Според Питагоровата теорема, триаголникот е правоаголен бидејќи
$13^2 = 5^2 + 12^2$.
Овој триаголник им бил познат уште на старите Индијци, па затоа тој го добил името **индиски триаголник**.

Природните броеви a, b и c, за кои важи равенството $a^2 + b^2 = c^2$ односно, кои можат да бидат страни на правоаголен триаголник, се викаат **Питагорови тројки**.
Питагоровата тројка ја запишуваме како подредена тројка броеви (a, b, c).

Питагорови тројки се, на пример, (3, 4, 5), (12, 5, 13), (20, 21, 29) итн.

Задача 4

Провери дали се Питагорови тројки дадените тројки броеви:
а) (10, 11, 14), б) (6,8,10), в) (9,12,15), г) (10,24,26), д) (15,36,39).

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

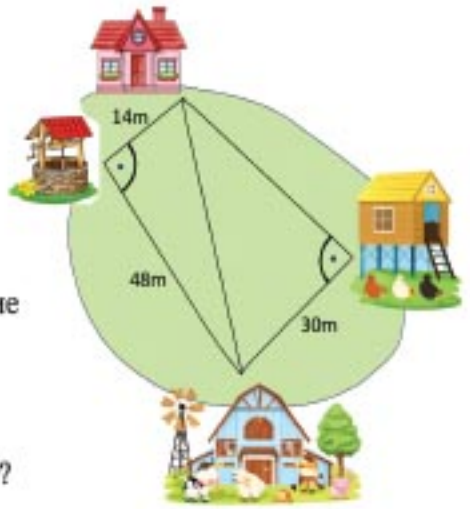
1. Одреди ја хипотенузата на правоаголен триаголник, ако неговите две катети се:
   а) $a = 6$ cm и $b = 12$ cm, б) $a = 8$ cm и $b = 6$ cm,
   в) $a = 12$ cm и $b = 16$ cm, г) $a = 10$ cm и $b = 24$ cm.

2. Одреди ја едната катета на правоаголен триаголник ако хипотенузата и втората катета имаат должини:
   а) $c = 20$ cm и $b = 12$ cm, а) $c = 10$ cm и $a = 8$ cm,
   в) $c = 25$ cm и $b = 15$ cm, г) $c = 34$ cm и $a = 16$ cm.

3. Од едно пристаниште истовремено испловиле два брода и тоа едниот во насока на запад со брзина од 24 km/h, а другиот во насока север со брзина од 26 km/h. Пресметај колку ќе бидат оддалечени бродовите после:
   а) 1 час, б) 2 часа од тргнувањето.

4. Пресметај го периметарот на правоаголен триаголник ако се дадени хипотенузата и една катета: а) $c = 29$ cm и $b = 21$ cm,
   б) $c = 34$ cm и $b = 16$ cm, в) $c = 17$ cm и $b = 15$ cm.

5. Во еден селски двор куќата и бунарот се на растојание 14 m, бунарот и шталата се на 48 m растојание, а шталата и кокошарникот на 30 m (црт. 5).
   а) Колку е растојанието меѓу куќата и шталата?
   б) Колку е растојанието меѓу куќата и кокошарникот?



црт. 5

6. Испитај дали триаголникот е правоаголен, ако:
   а) $a = 15$ cm, $b = 36$ cm и $c = 39$ cm, б) $a = 9$ cm, $b = 12$ cm и $c = 15$ cm,
   в) $a = 20$ cm, $b = 13$ cm и $c = 25$ cm, г) $a = 12$ cm, $b = 7$ cm и $c = 15$ cm.

7. **Проектна активност**

   1. Составуваме Питагорови тројки

   Питагоровите тројки (a, b, c) ги составуваме со помош на Евклидовите формули. Нека m и n се кои било природни броеви такви што $m > n$. Броевите a, b и c кои формираат Питагорова тројка ги добиваме со формулите:

   $$\boldsymbol{a} = (m^2 - n^2)k,\ \boldsymbol{b} = 2mnk \text{ и } \boldsymbol{c} = (m^2 + n^2)k.$$

   На пример, за $m = 2$, $n = 1$ и $k = 1$ добиваме

   $$a = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = \mathbf{3},\ b = 2 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{4} \text{ и } c = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = \mathbf{5},$$

   за $m = 3$, $n = 1$ и $k = 1$, добиваме

   $$a = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = \mathbf{8},\ b = 2 \cdot 3 \cdot 1 = \mathbf{6} \text{ и } c = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = \mathbf{10}.$$

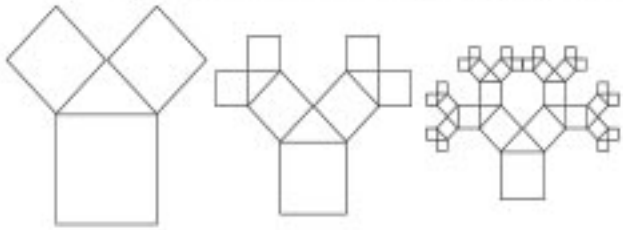
Прецртај ги и пополни ги дадените табели.

$m=2, n=1$ и $k=1$	a	b	c
$m=3, n=1$ и $k=1$			
$m=4, n=1$ и $k=1$			
$m=5, n=1$ и $k=1$			
$m=6, n=1$ и $k=1$			

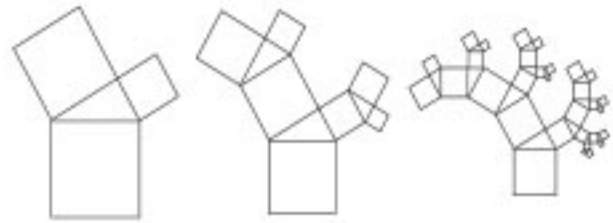
$m=3, n=2$ и $k=1$	a	b	c
$m=4, n=2$ и $k=1$			
$m=5, n=2$ и $k=1$			
$m=6, n=2$ и $k=1$			
$m=7, n=2$ и $k=1$			

2. Креираме Питагорово дрво

Кај Питагоровото дрво должините на страните на неговите гранки и лисја имаат мерни броеви кои се Питагорови тројки. Питагоровото дрво почнуваме да го формираме од коренот со цртање квадрат над кој конструираме правоаголен триаголник, кој може да биде рамнокрак (црт. 6а) или разностран (црт. 6б).



црт. 6а



црт. 6б

Продолжуваме со конструкција на квадрати над катетите, потоа над квадратите нови правоаголни триаголници и така ја градиме нашата креација.
Примери за Питагорови дрва се дадени на цртеж 7а и цртеж 7б.



црт. 7а



црт. 7б

Твоја задача е на лист од блок да креираш свое Питагорово дрво, така што ќе почнеш со квадрат со страна 5 cm и над него:
а) рамнокрак правоаголен триаголник, б) разностран правоаголен триаголник.
Формата на стеблото, гранките и лисјата можеш да ја испланираш по желба и да ја составиш со поставување на триаголниците во различни положби.

Истражување



1. Питагоровата теорема е една од најважните и најприменуваните теореми во геометријата. Името го добила во чест на античкиот математичар и филозоф Питагора, кој живеел во VI век пр. н.е. Со помош на интернет побарај информации за животот на античкиот математичар Питагора и неговите откритија.

2. Метеоролозите од една метеоролошка станица набљудуваат облак во атмосферата. Со мерења утврдиле дека:

- растојанието по земја од метеоролошката станица до точката која се наоѓа вертикално под облакот изнесува $d = 4$ km,
- висината на облакот над земјата изнесува $h = 1{,}5$ km.

Растојанието од метеоролошката станица до облакот го означиле со L.

а) Прикажи ја ситуацијата со скица и означи ги катетите и хипотенузата на правоаголниот триаголник.

б) Со примена на Питагоровата теорема пресметај го растојанието L од метеоролошката станица до облакот. Резултатот заокружи на 0,1 km.

в) Објасни како би можеле научниците да ја проверат точноста на мерењето со примена на обратната Питагорова теорема, ако посебно ги измериле трите должини (двете катети и хипотенузата).

г) Истражи во кои случаи грешка во мерењето со точност од 0,1 km може да биде критична во метеорологијата (за авионски летови или за временска прогноза).

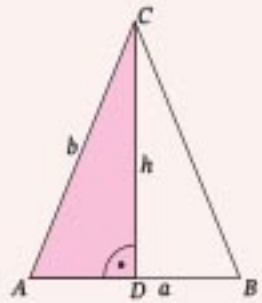
8. ПРИМЕНА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА ВО ТРИАГОЛНИЦИ

Активност

На цртеж 1 е даден рамнокрак триаголник ABC со основа a и крак b. Од темето C е повлечена висина h кон основата.

а) Дали се правоаголни триаголниците ADC и BCD?

б) Дали $\overline{AD} = \overline{DB}$?

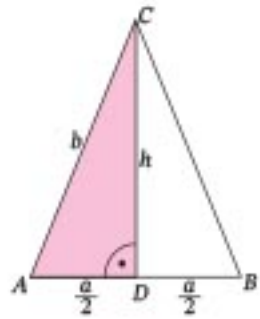


црт. 1

Во рамнокрак триаголник ABC, висината h повлечена кон основата a го разделува рамнокракиот триаголник ABC на два складни правоаголни триаголника ADC и BDC (црт. 2). Според Питагоровата теорема, ја добиваме формулата за пресметување на кракот b на рамнокракиот триаголник

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

каде што h е висината на триаголникот и a е основата на триаголникот.



црт. 2

Пример 1

Во рамнокрак триаголник, пресметај ги:

а) кракот b, ако $a = 16$ cm и $h = 15$ cm, б) висината h, ако $a = 10$ и $b = 13$ cm,

в) основата a, ако $b = 25$ m и $h = 24$ m.

Според Питагоровата теорема, со замена во соодветните формули, добиваме

а) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$b^2 = 15^2 + \left(\frac{16}{2}\right)^2$

$b^2 = 15^2 + 8^2$

$b^2 = 289$

$b = \sqrt{289}$

$b = 17$ cm.

б) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = 13^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2$

$h^2 = 13^2 - 5^2$

$h^2 = 144$

$h = \sqrt{144} = 12$ cm.

$h = 12$ cm.

в) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 25^2 - 24^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 49$

$\frac{a}{2} = 7$

$a = 14$ cm.

Задача 1

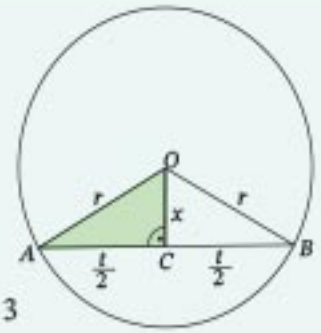
Пресметај го периметарот на рамнокрак триаголник со основа 18 cm и висина 12 cm.
Направи цртеж.
Упатство: Периметарот на рамнокрак триаголник се пресметува по формулата $L = a + 2b$, каде што a е основата, а b е кракот на рамнокракиот триаголник.

Пример 2

Во кружница со радиус $r = 8$ cm е повлечена тетива $t = 12{,}8$ cm. Пресметај го растојанието на тетивата од центарот на кружницата (црт. 3).

Триаголникот ABO е рамнокрак триаголник со краци $\overline{AO} = \overline{BO} = r$.
Растојанието $\overline{OC} = x$ е висината на правоаголниот триаголникот ABO.
Со помош на Питагорова теорема добиваме

$$x^2 = r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 = 8^2 - \left(\frac{12{,}8}{2}\right)^2 = 8^2 - 6{,}4^2 = 23{,}04,\ x = 4{,}8 \text{ cm}.$$



црт. 3

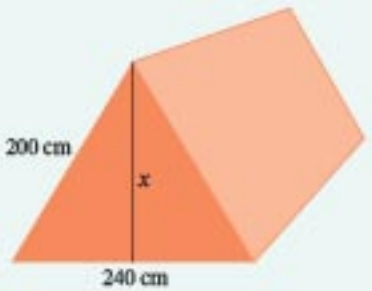
Пример 3

Драган треба да купи цевка со која ќе го потпре шаторот чиј влез е во форма на рамнокрак триаголник со крак 200 cm и основа 240 cm (слика 1).
Колкава е должината на цевката што треба да ја купи Драган?

Должината на цевката x е висината на рамнокракиот триаголник со основа 240 cm и крак 200 cm.
Со помош на Питагоровата теорема добиваме дека

$$x^2 = 200^2 - \left(\frac{240}{2}\right)^2 = 200^2 - 120^2 = 25600,\ x = 160 \text{ cm}.$$

Должината на цевката што треба да ја купи Драган е 160 cm.

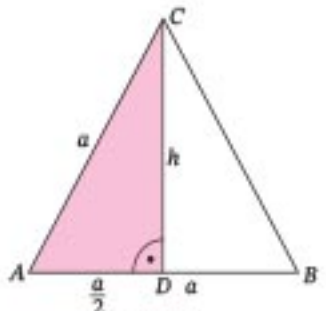


слика 1

Со повлекување на било која висина h, рамностраниот триаголник ABC, се разделува на два складни правоаголни триаголника (црт. 4). Според Питагоровата теорема ја добиваме формулата за пресметување на страната a на рамностраниот триаголник

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

каде што h е висината на рамностраниот триаголник.



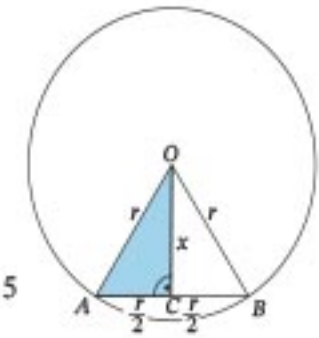
црт. 4

Задача 2

Во рамностран триаголник, пресметај ја висината h, ако страната $a = 10$ cm.

Задача 3

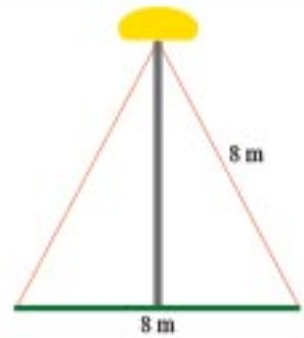
Во кружница со радиус $r = 8$ cm е повлечена тетива со должина еднаква на радиусот на кружницата.
Пресметај го растојанието x на тетивата од центарот на кружницата (црт. 5).



црт. 5

Задача 4

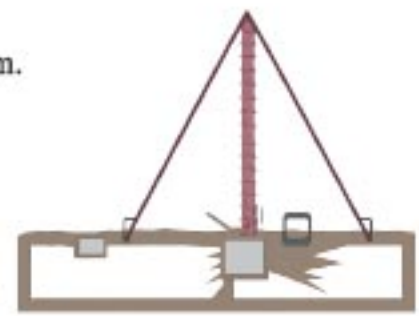
На училишното игралиште е поставена светилка на столб кој е потпрен со два симетрични држачи долги по 8 m (слика 2).
Колку е висок столбот ако растојанието меѓу двата држачи мерено на подлогата е 8 m?



слика 2

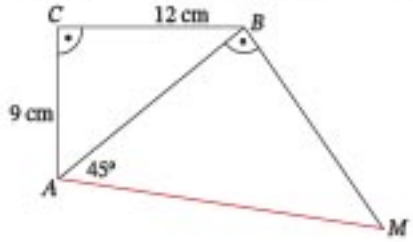
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

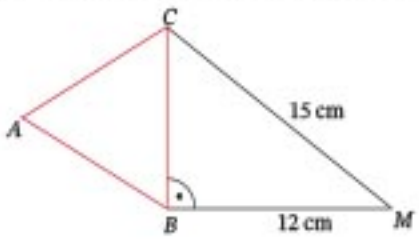
1. Пресметај ја висината на рамнокрак триаголник, ако се познати неговите основа и крак: а) $a = 7$ cm и $b = 5{,}5$ cm, б) $a = 18$ cm и $b = 15$ cm.
2. Пресметај го кракот на рамнокрак триаголник со дадени основа a и висина кон основата h: а) $a = 14$ cm и $h = 24$ cm, б) $a = 24$ dm и $h = 16$ dm.
3. Пресметај ја висината на рамностран триаголник со страна: а) $a = 8$ cm, б) $a = 10$ cm.
4. Пресметај ја должината на катетата на рамнокрак правоаголен триаголник, ако хипотенузата е долга 10 cm.
5. Столб висок 40 m е врзан со челични јажиња за колчиња забиени во земјата на оддалеченост 9 m од неговото подножје (слика 3). Колкава е должината на челичните јажиња?



слика 3

6. Според дадените податоци на цртеж 6, пресметај:
а) должина на отсечката AM, б) периметар на рамностраниот триаголник ABC.





црт. 6

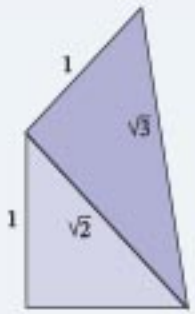
7. Во центарот на кружно езерце со дијаметар 60 метри е поставена скулптура.
Преку езерцето е поставен мост со должина 48 метри (слика 4). Од средината на мостот треба да се постави помал монтажен мост кој ќе води до скулптурата. Колку ќе биде неговата должина?



слика 4

Истражување

За да конструираме отсечка со должина $\sqrt{2}$ во избрана мерна единица, треба да конструираме правоаголен триаголник со катета 1.
Ако на цртежот на кој сме ја конструирале отсечката со должина $\sqrt{2}$, конструираме правоаголен триаголник со катети со должина $\sqrt{2}$ и должина 1, должината на хипотенузата ќе биде еднаква на $\sqrt{3}$ ($(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$) (црт. 7).
Објасни ја постапката, со која, во еден ист цртеж ќе можеш да ги конструираш отсечките со должина: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$.



црт. 7

9. ЧЕТИРИАГОЛНИК. ПАРАЛЕЛОГРАМ. ПРАВОАГОЛНИК, РОМБ И КВАДРАТ

Активност

а) Именувај ги четириаголниците на цртеж 1.



црт. 1

б) Набroj некои својства кои ги знаеш за паралелограмите, правоаголниците, ромбовите и квадратите.

Четириаголник

Разгледај го четириаголникот $ABCD$ на цртеж 2.

Да се потсетиме дека точките A, B, C и D се **темиња** на четириаголникот, а отсечките AB, BC, CD и DA се **страни** на четириаголникот.

Аглите α, β, γ и δ се внатрешни агли (накусо агли) на четириаголникот.



црт. 2

Две темиња што лежат на иста страна се нарекуваат **соседни темиња**, а две темиња што не лежат на иста страна се нарекуваат **спротивни темиња**. На пример, темињата A и B се соседни, а темињата A и C се спротивни.

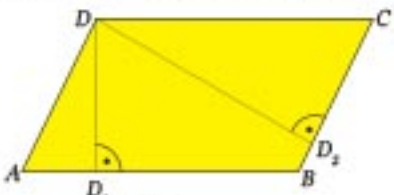
Две страни со заедничко теме се нарекуваат **соседни страни**, а две страни кои немаат заедничко теме се нарекуваат **спротивни страни**. Во таа смисла, страните AB и BC се соседни, а страните AB и CD се спротивни страни.

Аглите што лежат на иста страна се нарекуваат **соседни агли**, а аглите што не лежат на иста страна се нарекуваат **спротивни агли**.

Збирот на аглите во четириаголник изнесува 360°, односно $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.

Паралелограм

Потсети се дека четириаголник со два пара паралелни страни се нарекува **паралелограм**. Растојанието меѓу паралелните страни во паралелограмот се нарекува **висина на паралелограмот**. Исто така, познато ти е дека отсечка чии крајни точки се две спротивни темиња се вика **дијагонала на паралелограмот**.



црт. 3а



црт. 3б

На цртеж 3а е даден паралелограм $ABCD$. Отсечките DD_1 и DD_2 се висините спуштени од темето D кон страните AB и BC, соодветно. Забележи дека секој паралелограм има две висини. На цртеж 3б е даден паралелограм $ABCD$. Отсечките AC и BD се дијагонали на паралелограмот. Секој паралелограм има две дијагонали.

Задача 1

Нацртај произволен паралелограм, а потоа означи ги неговите темиња и агли. Запиши ги паровите: соседни темиња, спротивни темиња, соседни агли и спротивни агли. Нацртај ги неговите: а) висини, б) дијагонали.

Со примена на признаците за складност на триаголници, може да објасниме некои својства на паралелограмите кои си ги изучил претходно.

Разгледај го паралелограмот $ABCD$ на цртеж 4а. За триаголниците ABD и CDB важи:

A: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ Како наизменични агли на трансферзалата BD на паралелните прави AB и CD.

C: BD е заедничка страна,

A: $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$ Како наизменични агли на трансферзалата BD на паралелните прави AD и BC.

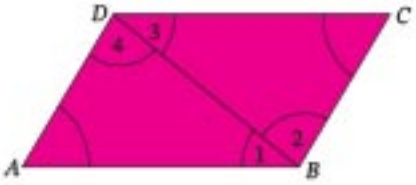
ACA: $\Delta ABD \cong \Delta CDB$.

Од складноста на триаголниците ABD и CDB, добиваме дека соодветните страни и агли се еднакви. Поточно, еднакви се:

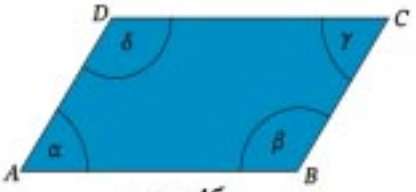
спротивните страни $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overline{AD} = \overline{CB}$, и

спротивните агли $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = \sphericalangle ADC$.

Аглите α и δ се суплементни агли, како спротивни агли на трансверзалата AD на паралелните прави AB и CD (црт. 4б), односно $\alpha + \delta = 180^\circ$.



црт. 4а

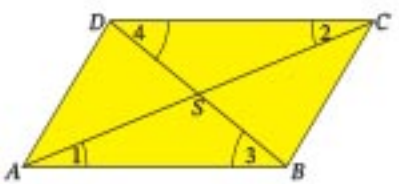


црт. 4б

- Секоја дијагонала го дели паралелограмот на два складни триаголници.
- Во секој паралелограм спротивните страни се еднакви меѓу себе.
- Во секој паралелограм спротивните агли се еднакви меѓу себе.
- Во секој паралелограм соседните агли се суплементни.

Задача 2

Со помош на признаците за складност на триаголници, објасни зошто во секој паралелограм дијагоналите се преполовуваат со пресечната точка. Упатство: Утврди дека $\Delta ABS \cong \Delta CDS$ (црт. 5).



црт. 5

Пример 1

Пресметај ги другите агли на паралелограм ако еден од неговите агли изнесува 70°.

$\alpha = 70^\circ$.
$\gamma = 70^\circ$ Спротивните агли во паралелограм се еднакви.
$\alpha + \beta = 180^\circ$ Соседните агли во паралелограм се суплементни.
$70^\circ + \beta = 180^\circ$
$\beta = 110^\circ$
$\delta = \beta = 110^\circ$ Спротивните агли во паралелограм се еднакви.

Задача 3

Во еден ботанички парк се гради нова стаклена градина. Основата на градината треба да биде во форма на паралелограм $ABCD$. Архитектот ги одбележал точките A, B, C и D на теренот и измерил дека аголот во темето A е 72°. Пресметај ги аглите во паралелограмот.

Задача 4

Збирот на два спротивни агли во даден паралелограм е 142°. Пресметај ги аглите во паралелограмот.

Правоаголниците, ромбовите и квадратите се паралелограми, па според тоа општите својства за паралелограмите важат и за нив. Во продолжение ќе изнесеме неколку посебни својства на правоаголниците, ромбовите и квадратите, кои ќе можеш да ги применуваш во решавање на проблеми.

Правоаголник

Потсети се дека паралелограм во кој сите агли се прави агли се нарекува **правоаголник**.
На цртеж 6 е даден правоаголник $ABCD$ со дијагонали AC и BD.



црт. 6

За триаголниците ABC и BAD имаме:
C: AB е заедничка страна,
A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 90^\circ$ Паралелограмот $ABCD$ е правоаголник.
C: $\overline{AD} = \overline{BC}$, Како спротивни страни на паралелограм.
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.
$\overline{AC} = \overline{BD}$ Како соодветни страни на складните триаголници ABC и BAD.

Дијагоналите во секој правоаголник се меѓу себе еднакви.

На цртеж 7 е даден паралелограм $ABCD$ со еднакви дијагонали.



црт. 7

За триаголниците ABC и BAD имаме:

С: AB е заедничка страна,

С: $\overline{AC} = \overline{BD}$, Според условот за дијагоналите на паралелограмот.

С: $\overline{AD} = \overline{BC}$, Како спротивни страни на паралелограм.

ССС: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$ Како соодветни агли во складните триаголници ABC и BAD.

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180°$ Како соседни агли во паралелограм.

Од $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$ и $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180°$, добиваме дека $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 90°$.

Ако дијагоналите на еден паралелограм се еднакви, тогаш тој паралелограм е правоаголник.

Пример 2

Дијагоналите во правоаголник $ABCD$ се сечат во точката S.

а) Запиши ги сите парови складни триаголници чии темиња се A, B, C, D или S.

б) Кои од нив се рамнокраки, а кои правоаголни триаголници?

а) $\Delta ABS \cong \Delta DCS$, $\Delta BSC \cong \Delta ASD$, $\Delta ABC \cong \Delta BAD$, $\Delta ABC \cong \Delta DCB$, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$, $\Delta BAD \cong \Delta DCB$, $\Delta BAD \cong \Delta CDA$ и $\Delta DCB \cong \Delta CDA$.

б) Рамнокраки се: ΔABS, ΔDSC, ΔBSC и ΔASD.
Правоаголни се: ΔABC, ΔBAD, ΔBCD и ΔCDA.

Пример 3

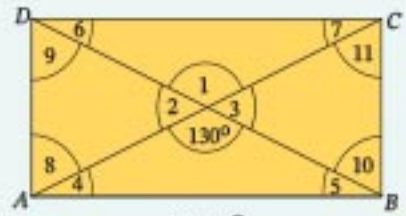
Поголемиот агол што го зафаќаат дијагоналите AC и BD на правоаголник $ABCD$ е 130°. Колку изнесуваат аглите што ги зафаќаат дијагоналите со страните на правоаголникот?

Да ја означиме со S пресечната точка на дијагоналите AC и BD. Од цртеж 8 согледуваме дека:

$\sphericalangle 1 = 130°$ Како накрсни агли.

$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = 180° - 130° = 50°$ Како напоредни агли.

$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 5 = 25°$ Како агли на основата на рамнокракиот триаголник ABS.



црт. 8

$\sphericalangle 6 = \sphericalangle 7 = 25°$ Како агли на основата на рамнокракиот триаголник DSC.

$\sphericalangle 8 = \sphericalangle 9 = 65°$ Како агли на основата на рамнокракиот триаголник ASD.

$\sphericalangle 10 = \sphericalangle 11 = 65°$ Како агли на основата на рамнокракиот триаголник BSC.

Задача 5

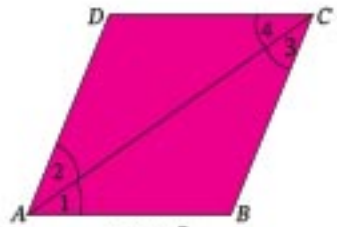
Во правоаголник $ABCD$, аголот меѓу дијагоналата AC и страната AD изнесува 32°.
а) Пресметај го аголот меѓу дијагоналата AC и страната BC.
б) Најди ги другите агли што ги формира дијагоналата AC со страните.
в) Колкав е аголот меѓу дијагоналите AC и BD?

Задача 6

Во правоаголна соба $ABCD$, од точката A до спротивното теме C е поставена ЛЕД-лента по таванот. Лентата зафаќа агол од 52° со страната AB.
а) Нацртај го правоаголникот $ABCD$.
а) Колкав е аголот што го зафаќа лента со страната AD?
б) Колкав е аголот меѓу лентата и страната BC?

Ромб

Потсети се дека паралелограм во кој сите страни се еднакви се нарекува **ромб**.



црт. 9

За ромбот $ABCD$ на цртеж 9 важи:

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$ Како спротивни агли во паралелограм.

За рамнокраките триаголниците ABC и ADC имаме:

C: AC е заедничка страна,

C: $\overline{AB} = \overline{AD}$, Сите страни на ромбот се еднакви.

C: $\overline{BC} = \overline{CD}$,

CCC: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$.

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ Како соодветни агли на складните триаголници ABC и ADC.

Согледуваме дека AC е симетрала на аголот во темето A и на аголот во темето C.
На сличен начин, можеме да објасниме дека BD е симетрала на аголот во темето B и на аголот во темето D.

Дијагоналите во секој ромб се симетрали на спротивните агли.

На цртеж 10 е даден ромб $ABCD$ со дијагонали AC и BD кои се сечат во точката S.
За триаголниците ΔABS и ΔCBS важи:

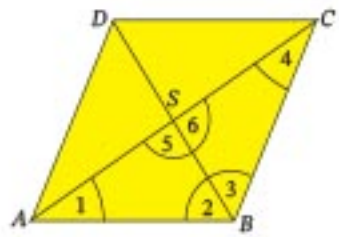
C: BS е заедничка страна,

C: $\overline{AB} = \overline{BC}$, Сите страните на ромбот се еднакви.

C: $\overline{AS} = \overline{CS}$, Дијагоналите кај ромбот се преполовуваат.

CCC: $\Delta ABS \cong \Delta CBS$.

$\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$ Како соодветни агли на складните триаголници ΔABS и ΔCBS.



црт. 10

Од $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$ и $\sphericalangle 5 + \sphericalangle 6 = 180°$, добиваме дека $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6 = 90°$.
Дијагоналите AC и BD се заемно нормални ($AC \perp BD$).

Дијагоналите во секој ромб се заемно нормални.

На цртеж 11 е даден паралелограм $ABCD$ со заемно нормални дијагонали AC и BD.
За триаголниците ΔABS и ΔCBS важи:

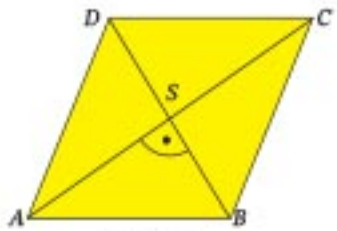
C: BS е заедничка страна,

A: $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSB = 90^\circ$, Според условот за нормалност на дијагоналите на паралелограмот.

C: $\overline{AS} = \overline{CS}$, Дијагоналите кај паралелограм се преполовуваат.

CAC: $\Delta ABS \cong \Delta CBS$.

$\overline{AB} = \overline{BC}$ Како соодветни страни на складните триаголници ΔABS и ΔCBS.



црт. 11

Ако во еден паралелограм дијагоналите се заемно нормални, тогаш тој е ромб.

Задача 7

Во ромб $ABCD$ точките A_1, B_1, C_1 и D_1 се средини на страните AB, BC, CD и DA, соодветно. Каков паралелограм се добива со сврзување на овие точки? Образложи го одговорот.

Пример 4

Пресметај ја должината на покусата дијагонала на ромб, ако должината на страната е 5 cm и еден негов агол е 120°?

Ромбот $ABCD$ што ги исполнува условите во задачата е даден на цртеж 12. Имаме:

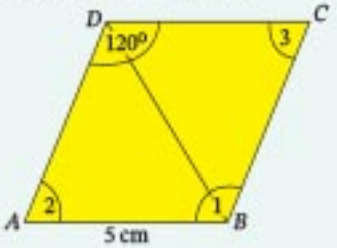
$\sphericalangle 1 = 120^\circ$ Како спротивни агли во ромб.

$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ Како спротивни агли во ромб.

$120^\circ + 120^\circ + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 360^\circ$ Збирот на аглите во ромб е 360°.

$\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 120^\circ$

Од $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ и $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 120^\circ$ наоѓаме дека $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = 60^\circ$.

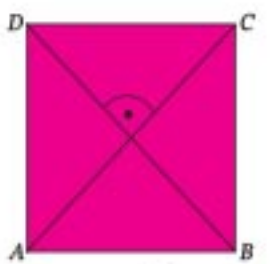


црт. 12

Триаголникот ABD е рамностран триаголник, како рамнокрак триаголник со агол при врвот 60°. Според тоа, покусата дијагонала изнесува $\overline{BD} = 5\text{cm}$.

Квадрат

Бидејќи секој квадрат е правоаголник со еднакви страни и е ромб со прави агли, сите својства што важат за правоаголниците и ромбовите, важат и за квадратите. Покрај нив, квадратите ги имаат и следните дополнителни својства.
Дијагоналите во квадрат се еднакви, бидејќи тој е правоаголник. Исто така тие се и нормални, бидејќи тој е и ромб (црт. 13).



црт. 13

- Дијагоналите во секој квадрат се еднакви и заемно нормални.
- Ако во еден паралелограм дијагоналите се еднакви и заемно нормални, тогаш тој е квадрат.

Пример 5

Во музеј има интерактивна изложба во квадратна сала $ABCD$. Во темињата A, B, C и D се поставени уреди што емитираат ласерски зраци.
Кога изложбата се вклучува од темето A се емитира зрак кон темето C (долж дијагоналата AC), а од темето B се емитира зрак кон темето D (долж дијагоналата BD).
Уредите се програмирани така што секој пат кога ќе се пресечат двата зрака, се активира светлосен ефект.
а) Под каков агол се сечат зраците AC и BD?
б) Дали дијагоналите AC и BD се еднакви? Објасни зошто.
в) Каков агол зафаќа дијагоналата AC со страната AB?

Салата е во форма на квадрат. Затоа:
а) зраците AC и BD се сечат под прав агол, б) дијагоналите AC и BD се еднакви,
в) дијагоналата AC со страната AB зафаќа агол од 45°.

Задача 8

Во квадрат $ABCD$ точките A_1, B_1, C_1 и D_1 се средини на страните AB, BC, CD и DA, соодветно. Каков паралелограм се добива со сврзување на тие точки?

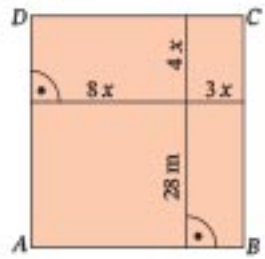
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Збирот на два спротивни агли во паралелограмот е 94°. Најди ја големината на секој од аглите на паралелограмот.
2. Пресметај ги аглите на паралелограм ако е познато дека еден од неговите агли е 2 пати поголем од другиот.
3. Поголемата дијагонала на ромбот образува агол од 35° со страната. Најди ги аглите на ромбот.
4. Најди ги аглите на ромбот ако една негова дијагонала е еднаква со страната.
5. Страната на правоаголникот долга 6 cm образува агол од 60° со дијагоналата. Најди ја должината на дијагоналата.
6. Дијагоналите на правоаголникот се сечат под агол од 132°. Најди ги аглите меѓу дијагоналите и страните на правоаголникот.
7. Аголот меѓу висината и страната на ромб изнесува 34°. Најди ги аглите на ромбот.
8. Најди ги аглите меѓу дијагоналите и страните на ромб ако еден агол на ромбот изнесува 46°.

9. Најди ги аглите на ромбот ако аголот меѓу висината и помалата дијагонала е 35°.

10. Во правоаголникот $ABCD$, точката M е средина на страната AB. Низ точката M е повлечена права што ја сече страната CD во точка N така што $\sphericalangle BMN = 75°$. Направи цртеж, а потоа пресметај го аголот: а) MNC, б) AMN?

11. Една парцела во форма на квадрат е поделена на делови како на цртеж 14. Најди ги димензиите (страните) на парцелата.



црт. 14

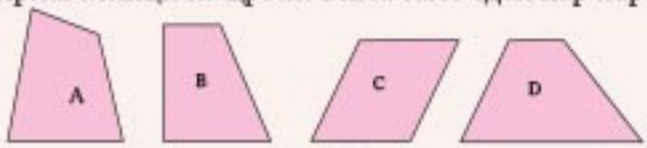
Истражување

На стиропор постави хартија на која има нацртано квадратна мрежа. Потоа постави 4 иглички како темиња на четириаголник и околу нив затегни растеглива лента (ластик). Истражувај за својствата на паралелограмите со менување на позициите на игличките. Испитај кога еден четириаголник е паралелограм во зависност од позицијата на пресекот на дијагоналите. Кога тој паралелограм е ромб? Каква промена на дијагоналите кај паралелограмот треба да се направи за да се добие правоаголник?

10. ТРАПЕЗ И ДЕЛТОИД

Активност

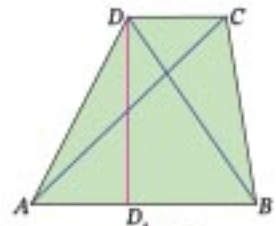
Кој од дадените четириаголници на цртеж 1 има само еден пар паралелни страни?



црт. 1

Потсети се дека четириаголник што има само еден пар паралелни страни се вика **трапез**.

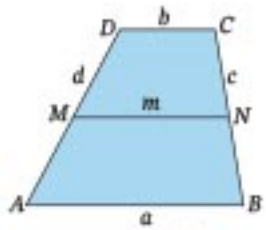
На цртеж 2 е прикажан трапез $ABCD$. Страните AB и CD се паралелни и се нарекуваат **основи** (горна и долна основа), а страните AD и BC не се паралелни и се нарекуваат **краци** на трапезот.



црт. 2

Растојанието меѓу паралелните страни се нарекува **висина на трапезот**. Отсечка што сврзува две спротивни темиња се вика **дијагонала на трапезот**. Отсечката DD_1 е висина на трапезот, а отсечките AC и BD се дијагонали на трапезот.

Ако со M ја означиме средината на кракот AD, а со N средината на кракот BC, тогаш отсечката MN е средна линија на трапезот $ABCD$ (црт. 3). Должините на основите се означуваат со $a = \overline{AB}$, $b = \overline{CD}$, должините на краците со $c = \overline{BC}$ и $d = \overline{AD}$, а должината на средната линија со $m = \overline{MN}$.



црт. 3

Отсечка што ги сврзува средините на краците на трапезот се вика **средна линија** на трапезот.

Задача 1

Нацртај произволен трапез, а потоа нацртај ги:
а) висините, б) дијагоналите, в) средната линија.

Средната линија на трапез е паралелна со основите и нејзината должина е еднаква на полузбирот од должините на основите.

Според тоа, должината на средната линија m на трапез се пресметува по формулата

$$m = \frac{a+b}{2},$$

каде што a и b се основите на трапезот.

Пример 1

Пресметај ја средната линија на трапез, ако неговите основи се долги 8 cm и 5 cm.

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{8+5}{2} = 6{,}5\,\text{cm}$ Заменуваме во формулата за средна линија на трапез.

Задача 2

Пресметај ја должината на средната линија на трапез со основи:
а) $a = 17$ cm и $b = 11$ cm, б) $a = 4{,}2$ dm и $b = 28$ cm.

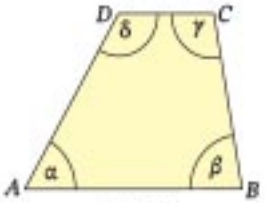
Задача 3

Основите на еден трапез се разликуваат за 10 cm. Пресметај ја нивната должина, ако должината на средната линија $m = 15$ cm.

Аглите α, β, γ и δ се внатрешните агли на трапезот $ABCD$ на цртеж 4.
Ако ги продолжиме страните на трапезот до прави, добиваме

$\alpha + \delta = 180°$ Како спротивни агли на трансверзалата AD на паралелните прави AB и DC.

$\beta + \gamma = 180°$ Како спротивни агли на трансверзалата BC на паралелните прави AB и DC.



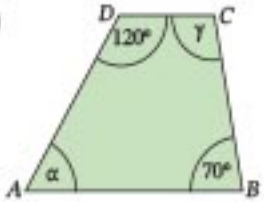
црт. 4

Аглите што лежат на ист крак на трапезот се суплементни.

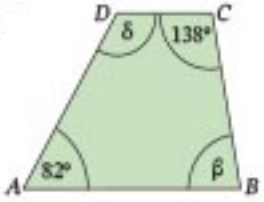
Пример 2

Пресметај ги аглите на трапезот даден на цртеж 5:

а)



б)



црт. 5

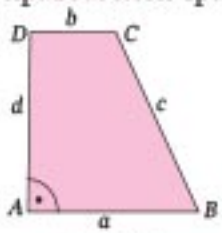
Бидејќи аглите што лежат на ист крак се суплементни, добиваме:

а) $\alpha + 120° = 180°$, $\alpha = 60°$; $70° + \gamma = 180°$, $\gamma = 110°$.

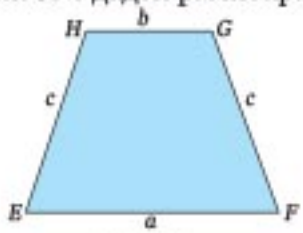
б) $\delta + 82° = 180°$, $\delta = 98°$; $\beta + 138° = 180°$, $\beta = 42°$.

Трапез на кој едниот од краците е нормален на основите се вика **правоаголен трапез**.
Трапез со еднакви краци се вика **рамнокрак трапез**.

На цртеж 6а е даден правоаголен трапез, а на цртеж 6б е даден рамнокрак трапез.



црт. 6а



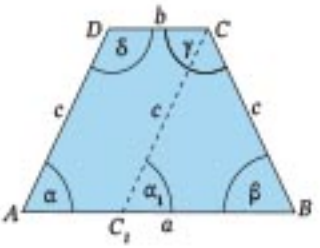
црт. 6б

Задача 4

Нацртај произволен рамнокрак трапез, а потоа нацртај ги неговите:

а) висина б) дијагонали в) средна линија

На цртеж 7 е даден рамнокрак трапез $ABCD$.
Со отсечка CC_1 паралелна на AD трапезот се разделува на рамнокрак триаголник C_1BC и паралелограм AC_1CD.



црт. 7

$\alpha_1 = \beta$ Како агли при основата на рамнокракиот триаголник C_1BC.

$\alpha_1 = \alpha$ Како согласни агли на трансверзалата AB за паралелните прави C_1C и AD.

$\beta = \alpha$ Следува од двете погорни равенства.

Аглите во секој рамнокрак трапез што лежат при иста основа се еднакви.

Пример 3

Пресметај ги аглите во рамнокрак трапез $ABCD$, ако едниот од нив е $\alpha = 68°$ (црт. 8).

$\beta = \alpha = 68°$ Аглите се еднакви како агли што лежат на иста основа AB.

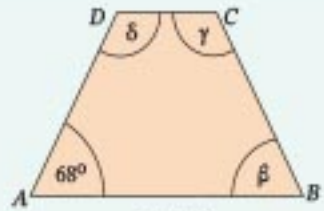
$\alpha + \delta = 180°$ Аглите се суплементни како агли што лежат на ист крак AD.

$68° + \delta = 180°$ Заменуваме и пресметуваме.

$\delta = 180° - 68°$

$\delta = 112°$.

$\gamma = \delta = 112°$ Аглите се еднакви како агли што лежат на иста основа CD.



црт. 8

Задача 5

Збирот на аглите што лежат на една од основите на рамнокрак трапез е 150° 20′. Пресметај ги останатите агли на трапезот.

На цртеж 9 е даден рамнокрак трапез $ABCD$. За триаголниците ABC и BAD имаме:

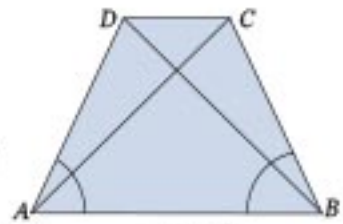
C: AB е заедничка страна,

A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$, Како агли при основата AB на рамнокракиот трапез.

C: $\overline{AD} = \overline{BC}$, Трапезот $ABCD$ е рамнокрак по услов во задачата.

CAC: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.

$\overline{AC} = \overline{BD}$ Како соодветни страни во складни триаголници.

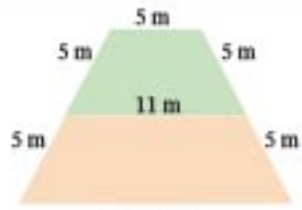


црт. 9

Дијагоналите во рамнокрак трапез се еднакви.

Пример 4

Цветна површина во училишниот двор има форма на рамнокрак трапез (слика 1). Горната основа е еднаква со краците и е долга 5 m, а долната основа е долга 11 m. Училиштето планира да го прошири тревникот така што ќе ги удвои краците, а потоа ќе го огради. Колку метри ограда е потребно за целиот тревник?



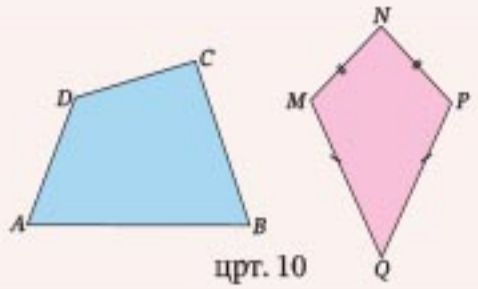
слика 1

Со удвојување на краците добиваме рамнокрак трапез со средна линија 11 m. Според тоа, $11 = \frac{a+5}{2}$, $a = 2 \cdot 11 - 5 = 17$ m.
Периметарот на тревникот ќе биде $L = 5 + 10 + 10 + 17 = 42$ m.

Делтоид

Активност

На цртеж 10 се дадени два трапезоиди *ABCD* и *MNPQ*.
Тие немаат ниту еден пар паралелни страни.
Кој од нив има две по две соседни страни еднакви?

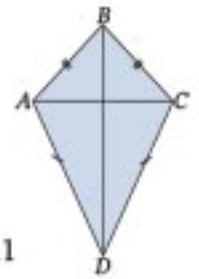


црт. 10

Сигурно согледа дека трапезоидот *MNPQ* има две по две соседни страни еднакви, односно $\overline{MN} = \overline{PN}$ и $\overline{MQ} = \overline{PQ}$.

Трапезоид што има два пара еднакви соседни страни се нарекува **делтоид**.

За делтоидот *ABCD* на цртеж 11 имаме:
С: *BD* е заедничка страна,
С: $\overline{AB} = \overline{CB}$,
С: $\overline{AD} = \overline{CD}$,
ССС: $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.

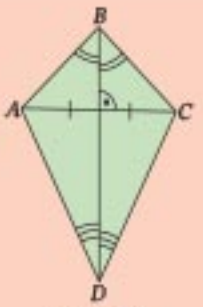


црт. 11

Дијагоналата чии крајни точки се темињата кои ги сврзуваат еднаквите страни го дели делтоидот на два складни триаголници.

Од складноста на овие два триаголници ги добиваме својствата што следуваат (црт. 12).

- Аглите при темињата што ги сврзуваат нееднаквите страни се еднакви.
- Дијагоналата чии крајни точки се темињата што ги сврзуваат еднаквите страни е симетрала на другата дијагонала.
- Дијагоналата чии крајни точки се темињата што ги сврзуваат нееднаквите страни, го дели делтоидот на два рамнокраки триаголници.
- Дијагоналите на делтоидот се заемно нормални.



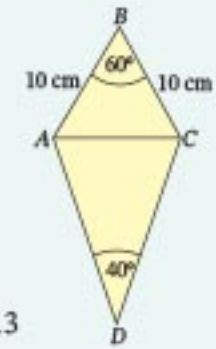
црт. 12

Пример 5

Пократките страни на делтоидот се долги 10 cm. Два негови спротивни агли се 60° и 40°. Колкава е должината на покусата дијагонала? Направи цртеж.

Делтоидот $ABCD$ што ги исполнува условите во задачата е даден на цртеж 13.
Триаголникот ACB е рамностран триаголник како рамнокрак триаголник со агол при врвот 60°.

Според тоа, покусата дијагонала изнесува $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$.



црт. 13

Задача 7

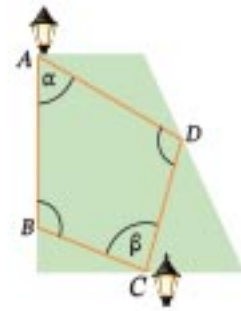
Два несоседни агли во делтоидот се 115° и 46°. Пресметај ги останатите агли.

Задача 8

Еден од внатрешните агли на делтоидот е 51°, а збирот на еднаквите агли е 144°. Пресметај ги аглите на делтоидот.

Задача 9

Во еден парк, на тревник во форма на правоаголен трапез се поставени светилки во точките A и C (слика 2). Светилката во A емитира светлина под агол од $\alpha = 38°$, а светилката во C под агол од $\beta = 132°$. Колку изнесуваат аглите под кои се сечат краците на аглите α и β, ако со пресекувањето се формира делтоид $ABCD$?



слика 2

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај ја средната линија на трапезот со основи $a = 18{,}6$ cm и $b = 13{,}8$ cm.
2. Средната линија на трапезот е 7,3 cm, а едната основа е 8,7 cm. Пресметај ја другата основа.
3. Средната линија на еден рамнокрак трапез е долга 7 cm, а основите се разликуваат за 5 cm. Пресметај ги должините на основите.
4. Периметарот на еден трапез со краци со должини 3 cm и 4 cm изнесува 20 cm. Пресметај ја должината на средната линија на трапезот.
5. Збирот на аглите што лежат на една од основите на правоаголен трапез е 235°. Пресметај ги останатите агли на трапезот.

6. Еден од аглите при долната основа на рамнокракиот трапез изнесува 45°, висината изнесува 8 cm, а помалата основа е долга 6 cm. Пресметај ја должината на поголемата основа на трапезот.
7. Пресметај ги аглите на рамнокрак трапез, ако е дадено дека аголот при помалата основа е двојно поголем од аголот при поголемата основа.
8. Пресметај ја висината на рамнокрак трапез ако еден од неговите внатрешни агли е 45°, а основите имаат должини 9 cm и 5 cm.
9. Во рамнокрак трапез $ABCD$, триаголникот ABC формиран од подолгата основа, кракот и една од дијагоналите на трапезот е рамнокрак. Ако аголот $BAC = 40°$, пресметај го аголот DAC.
10. Два спротивни агла во делтоидот се 51° и 86°. Пресметај ги другите агли на делтоидот.
11. Еден од внатрешните агли на делтоидот е 47°, а збирот на еднаквите агли е 236°. Најди ги аглите на делтоидот.
12. **Проектна задача**
    Нацртај ја на хамер дадената мисловна мапа. Пополни ја така што одговорите на прашањата ќе ги запишеш во соодветниот четириаголник.

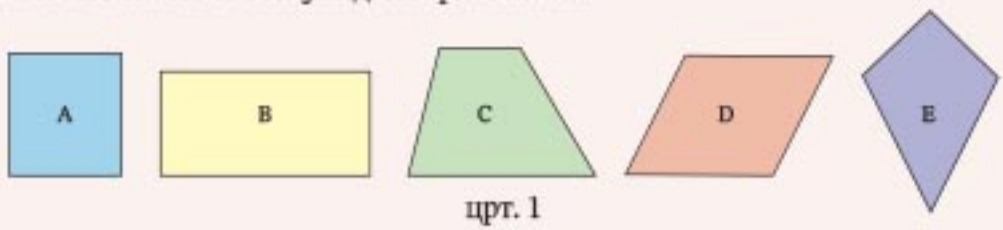
ЧЕТИРИАГОЛНИК Што е четириаголник? Кои две страни се соседни, а кои спротивни? Кои две темиња се соседни, а кои спротивни? Колку е збирот на неговите внатрешни агли?	ТРАПЕЗ Што е трапез? Како се викаат непаралелните страни? Што е средна линија на трапез? Какви се аглите што лежат на ист крак?	ДЕЛТОИД Какви се неговите страни? Во каков заемен однос се дијагоналите на делтоидот?
РАМНОКРАК ТРАПЕЗ Какви се краците меѓу себе? Какви се аглите што лежат при иста основа? Какви се дијагоналите меѓу себе?	ПРАВОАГОЛЕН ТРАПЕЗ Кој трапез се вика правоаголен?	ПАРАЛЕЛОГРАМ Што е паралелограм? Какви се спротивните страни меѓу себе? Какви се неговите спротивни агли? Какви се неговите соседни агли? Какви се дијагоналите во однос на нивната пресечна точка?
ПРАВОАГОЛНИК Какви се должините на неговите дијагонали? Какви се неговите агли?	КВАДРАТ Какви се должините на неговите дијагонали? Какви се по должина неговите страни? Какви се неговите агли? Што претставува дијагоналата за спротивните агли?	РОМБ Какви се должините на неговите страни? Под каков агол се сечат неговите дијагонали? Што претставува дијагоналата за спротивните агли?



11. ПРИМЕНА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА ВО ЧЕТИРИАГОЛНИЦИ

Активност

а) Именувај ги четриаголниците на цртеж 1.
б) Запиши што знаеш за секој вид четириаголник.

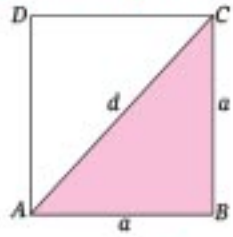


црт. 1

Питагоровата теорема наоѓа примена и во задачи за четириаголници (квадрати, правоаголници, трапези, ромбови, делтоиди итн.). Со повлекување на некои отсечки тие можат да се разделат на такви делови, меѓу кои ќе има правоаголни триаголници. Тоа ќе го илустрираме со следните задачи. За пресметките ќе користиме калкулатор и резултатот ќе го заокружуваме на две децимални места.

Примена на Питагоровата теорема во квадрат, правоаголник и ромб

На цртеж 2 е даден квадрат $ABCD$ со страна a. Дијагоналата d го дели квадратот на два складни рамнокраки триаголници. Таа е хипотенуза на секој од нив.



црт. 2

Со примена на Питагоровата теорема на секој од нив, ја добиваме формулата за пресметување на дијагоналата d на квадрат

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

каде што a е страната на квадратот.

Пример 1

Пресметај ја дијагоналата d на квадрат со страна $a = 9$ cm.

$d^2 = 2a^2,\ d^2 = 2 \cdot 9^2$	Заменуваме во формулата за пресметување на дијагонала на квадрат.
$d = 12{,}73$ cm	Заокружуваме на две децимални места.

Пример 2

Колку е страната на квадрат со дијагонала $d = 8$ cm?

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,\ a^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{8^2}{2} = 32,\ a = \sqrt{32} = 5{,}66\,\text{cm}$$

Задача 1

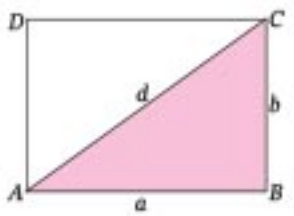
Пресметај ја

а) дијагоналата d на квадрат, ако $a = 6$ cm, б) страната a на квадрат, ако $d = 10$ cm.

На цртеж 3 е даден правоаголник $ABCD$ со страни a и b. Дијагоналата d го дели правоаголникот на два складни правоаголни триаголници. Таа е хипотенуза на секој од нив. Со примена на Питагоровата теорема на секој од нив, ја добиваме формулата за пресметување на дијагоналата d на правоаголник,

$$d^2 = a^2 + b^2$$

каде што a и b се страни на правоаголникот.



црт. 3

Пример 3

Пресметај ја дијагоналата d на правоаголник со страни $a = 20$ cm и $b = 40$ cm.

Заменуваме во формулата за пресметување на дијагонала на правоаголник.

$$d^2 = a^2 + b^2 = 20^2 + 40^2 = 400 + 1600 = 2000,$$

$$d = \sqrt{2000} = 44{,}72\,\text{cm}.$$

Пример 4

Пресметај ја страната a на правоаголник, ако $d = 16$ cm и $b = 7$ cm.

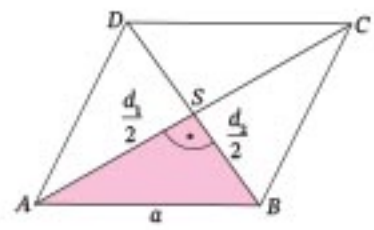
$d^2 = a^2 + b^2$, $a^2 = d^2 - b^2 = 16^2 - 7^2 = 256 - 49 = 207$, $a = 14{,}39$ cm.

Пример 5

Кошаркар висок 2,1 m добил хотелски кревет долг 2 m и широк 1 m. Дали може кошаркарот да се испружи на креветот?

Дијагоналата на хотелскиот кревет изнесува $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5^2} = 2{,}24\,\text{m}$.
Бидејќи 2,1 m < 2,24 m, кошаркарот ќе може да се испружи на креветот.

На цртеж 4 е даден ромб $ABCD$ со страна a и дијагонали d_1 и d_2. Потсети се дека дијагоналите на ромбот се преполовуваат и се нормални една на друга. Според тоа, тие го разделуваат ромбот на четири правоаголни триаголници. Со примена на Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник ASB, ја добиваме формулата за пресметување на страната a на ромбот,



црт. 4

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

каде што d_1 и d_2 се дијагоналите на ромбот.

Пример 6

Да се пресмета периметарот на ромб чии дијагонали се 24 cm и 10 cm.

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{24}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 12^2 + 5^2 = 169, \quad a = \sqrt{169} = 13\,\text{cm}.$$

Периметарот изнесува $L = 4a = 52$ cm.

Задача 2

Пресметај ја поголемата дијагонала на ромб со страна $a = 5$ cm, ако помалата дијагонала е $d_2 = 6$ cm.

Пример 7

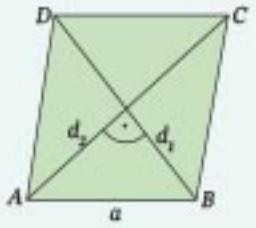
Миле треба со ограда да го подели на половина тревникот во форма на ромб, по помалата дијагонала d_1 (црт. 5).
Колку метри ограда треба да купи, ако знае дека другата дијагонала $d_2 = 80$ m, а страната $a = 41$ m?

$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 41^2 - \left(\frac{80}{2}\right)^2 = 1681 - 1600 = 81$

$\frac{d_1}{2} = 9$

$d_1 = 18$ m.

Миле треба да купи $2 \cdot 41 + 18 = 100$ m ограда.



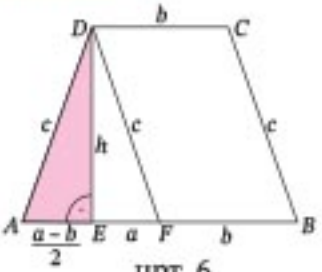
црт. 5

Примена на Питагоровата теорема во трапез и делтоид

Со отсечката DF паралелна со кракот BC, рамнокракиот трапез е разделен на паралелограм $BCDF$ и рамнокрак триаголник AFD, со основа $a - b$ и висина h (црт. 6).
Висината DE го дели рамнокракиот триаголник AFD на два складни правоаголни триаголници. Со примена на Питагоровата теорема на секој од нив, ја добиваме формулата за кракот c на рамнокракиот трапез,

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

каде што h е висината, а a и b се основите на трапезот.



црт. 6

Пример 8

Пресметај ја висината на рамнокрак трапез, ако се дадени основите $a = 10$ cm и $b = 4$ cm и должината на кракот $c = 5$ cm.

$c^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, $h^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 5^2 - \left(\frac{10-4}{2}\right)^2 = 5^2 - 3^2 = 16$

$h = 4$ cm.

Задача 3

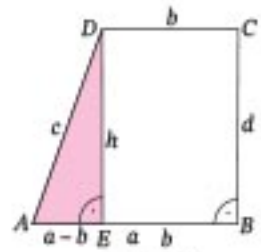
Пресметај го периметарот на рамнокрак трапез со основи $a = 18$ cm и $b = 8$ cm и висина $h = 12$ cm.

Упатство: Периметар на рамнокрак трапез се пресметува по формулата $L = a + b + 2c$, каде a и b се основите, а c е кракот на рамнокракиот трапез.

На цртеж 7 е даден правоаголен трапез $ABCD$ со основи a и b и висина h. Со примена на Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник AED, ја добиваме формулата за пресметување на кракот c на правоаголниот трапез,

$$c^2 = h^2 + (a-b)^2$$

каде што h е висината, а a и b се основите на трапезот.



црт. 7

Пример 9

Пресметај ја висината на правоаголен трапез со основи $a = 10$ cm и $b = 6$ cm, и крак $c = 12$ cm.

$$c^2 = h^2 + (a-b)^2,\ h^2 = c^2 - (a-b)^2 = 12^2 - (10-6)^2 = 128$$

$$h = \sqrt{128} = 11{,}31\,\text{cm}.$$

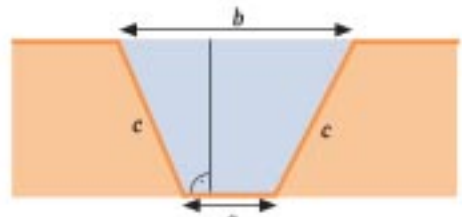
Задача 4

Пресметај го периметарот на правоаголен трапез со основи $a = 12$ cm и $b = 9$ cm, и висина $h = 4$ cm.

Упатство: Периметар на правоаголен трапез се пресметува по формулата $L = a + b + c + d$, каде a и b се основите, а c и d се краците на правоаголниот трапез.

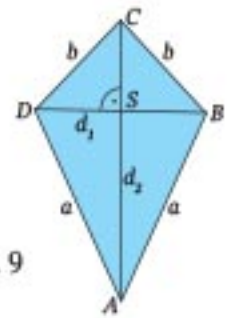
Задача 5

Еден канал има длабочина 2,4 m, а ширина $b = 3{,}2$ m (црт. 8). Колку метри е ширината на дното на каналот a, ако страничните ѕидови се долги $c = 25$ dm?



црт. 8

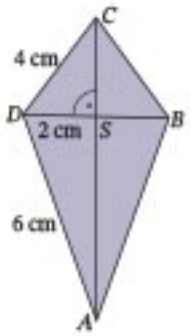
На цртеж 9 е даден делтоид $ABCD$ со страни a и b, и дијагонали d_1 и d_2. Потсети се дека дијагоналите кај делтоид се заемно нормални. Тие го разделуваат делтоидот на четири правоаголни триаголници.



црт. 9

Пример 10

Пресметај ги дијагоналите на делтоидот $ABCD$ според податоците на цртеж 10.



црт. 10

Според податоците од цртежот:

$d_1 = \overline{BD} = 2 \cdot 2 = 4\,\text{cm}$

$\overline{CS}^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$

$\overline{CS} = \sqrt{12} = 3{,}46\,\text{cm}$

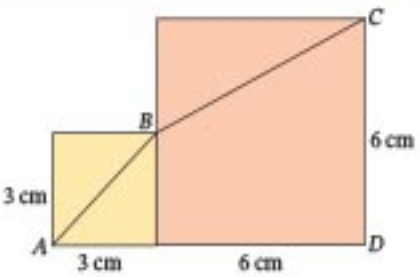
$\overline{AS}^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$

$\overline{AS} = \sqrt{32} = 5{,}66\,\text{cm}$

$d_2 = \overline{AS} + \overline{CS} = 5{,}66 + 3{,}46 = 9{,}12\,\text{cm}$.

Задача 6

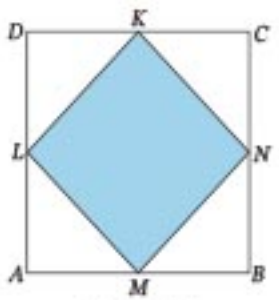
Два квадрати со страни 3 cm и 6 cm се поставени еден до друг како на цртеж 11. Пресметај го периметарот на четириаголникот $ABCD$.



црт. 11

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Најди ја должината на дијагоналата на правоаголник, чии страни се а) $a = 2{,}4$ cm и $b = 3{,}2$ cm, б) $a = 14$ cm и $b = 48$ cm.
2. Најди ја должината на дијагоналата на квадрат, чија страна е долга $a = 7{,}5$ cm.
3. Најди го периметарот на ромб со дијагонали: а) 48 cm и 64 cm, б) 66 cm и 88 cm.
4. Најди ја дијагоналата d_2 на ромбот ако страната и другата дијагонала се: а) $a = 26$ cm и $d_1 = 48$ cm, б) $a = 30$ cm и $d_1 = 36$ cm.
5. Квадрат $ABCD$ има страна 8 cm. Во него е впишан друг квадрат $MNKL$, чии темиња лежат во средините на страните на дадениот квадрат. Најди го периметарот на квадратот $MNKL$ (црт. 12).



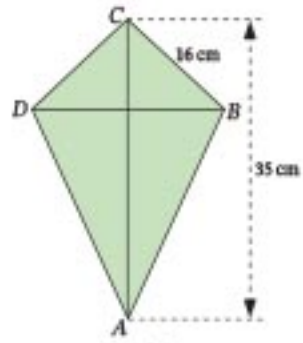
црт. 12

6. Иван купил кружна маса со дијаметар 230 cm. Дали ќе може да ја внесе во домот низ влезната врата висока 2 m, а широка 90 cm?
7. Висината на ромбот е 3 cm, а остриот агол е 45°. Најди го периметарот на ромбот.
8. Основите на рамнокрак трапез се $a = 42$ cm и $b = 24$ cm, а неговиот крак има должина 41 cm. Пресметај ја висината на трапезот.
9. Двете основи на еден правоаголен трапез се долги 5 cm и 10 cm, а неговиот подолг крак има должина 13 cm. Пресметај ја висината на трапезот.

10. Пресметај го периметарот на рамнокрак трапез со основи $a = 23$ cm и $b = 11$ cm и висина $h = 8$ cm.

11. Помалата дијагонала го дели делтоидот на рамностран триаголник со страна 10 cm и рамнокрак триаголник со висина 12 cm. Пресметај ги страните на делтоидот.

12. Емран прави летало во форма на делтоид како на цртеж 13. По рабовите сака да му залепи црвена лента. Колку центиметри лента ќе му биде потребно?

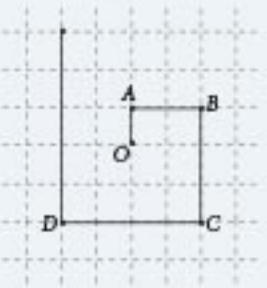


црт. 13

Истражување

Заради дефект на својот авион, пилотот Лука бил принуден да слета во пустина. Тој знаел дека во близина има село, но не знаел во кој правец е селото и колку е далеку. Бидејќи видливоста била до $\sqrt{2} \approx 1{,}41\text{km}$, тој можел да го види селото на растојание од најмногу 1,41 km.

Лука со помош на компас тргнал пеш да го бара селото на следниот начин. Од авионот означен со O одел 1 km на север (до точката A), 2 km на исток (до точката B), 3 km на југ (до точката C), 4 km на запад (до точката D), 5 km на север (до точката F), 6 km на исток итн. (црт. 14).



црт. 14

а) Зошто на овој начин Лука со сигурност ќе го најде селото?

б) Ако видливоста била до 1 km, а Лука одел по истата шема, дали е сигурно дека ќе го најде селото?

12. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

Активност

1. Конструирај триаголник, ако се дадени:
а) страните $b = 5$ cm и $c = 3$ cm и аголот меѓу нив $\alpha = 55°$,
б) страната $a = 5$ cm и аглите $\beta = 55°$ и $\gamma = 60°$ кои лежат на неа,
в) страните $a = 6$, $b = 5$ cm и $c = 4$ cm.

2. а) Колку независни елементи се потребни за конструкција на триаголник? Дали меѓу елементите има барем еден должински? Колку независни елементи, меѓу кои барем еден должински, се потребни за конструкција на рамнокрак триаголник или правоаголен триаголник, а колку за конструкција на рамностран триаголник?

б) Паралелограм со повлекување на една негова дијагонала се разделува на два складни триаголници. Колку независни елементи, меѓу кои барем еден должински, би биле потребни за конструкција на паралелограм? Колку независни елементи, меѓу кои барем еден должински, би биле потребни за конструкција на ромб, правоаголник или квадрат?

Конструкции на паралелограми

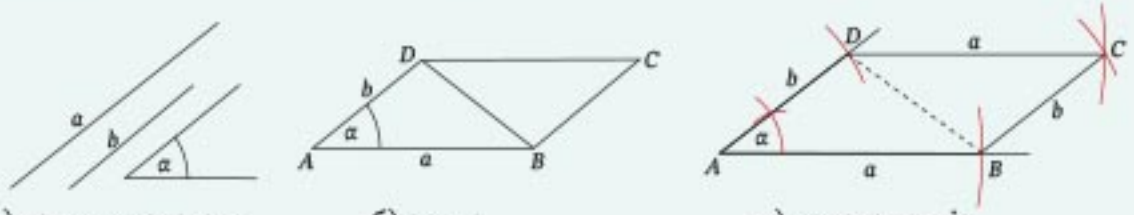
Ако точно одговори на поставените прашања сигурно согледа дека за **конструкција на паралелограм** се потребни најмногу три независни елементи, меѓу кои барем еден е зададена должина.

Користејќи ги основните конструкции на триаголник и својствата на паралелограмите што произлегуваат од признаци за складност на триаголниците CAC, ACA и CCC, многу лесно и едноставно ќе ги изведуваме и следните конструкции на паралелограми.

Пример 1

Конструирај паралелограм $ABCD$, ако се дадени две соседни страни a и b и аголот α меѓу нив.

Конструкцијата се изведува така што најпрво се конструира триаголникот ABD со дадени страни a и b и аголот α меѓу нив. Потоа над дијагоналата BD се конструира триаголник BDC со три дадени страни. Така го добиваме паралелограмот $ABCD$ (црт. 1). Постои само еден таков паралелограм.



а) дадени податоци б) скица в) конструкција

црт. 1

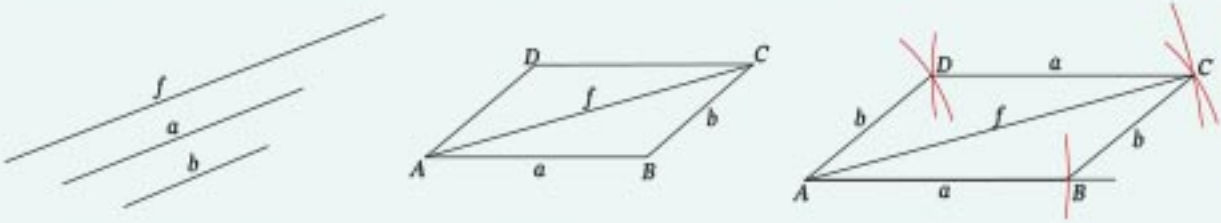
Задача 1

Конструирај паралелограм $ABCD$, ако се дадени две соседни страни $a = 5$ cm и $b = 3$ cm и аголот меѓу нив $\alpha = 60^{\circ}$.

Пример 2

Конструирај паралелограм $ABCD$, ако се дадени две соседни страни a и b и една негова дијагонала f.

Конструкцијата се изведува така што најпрвин се конструира триаголникот ABC. Потоа над дијагоналата AC се конструира триаголник ACD со три дадени страни. Така го добиваме паралелограмот $ABCD$ (црт. 2). Постои единствен таков паралелограм.



а) дадени податоци б) скица в) конструкција

црт. 2

Задача 2

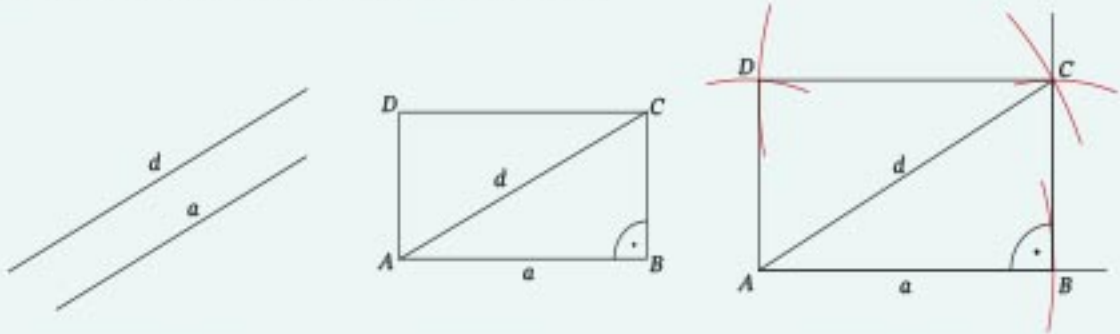
Конструирај паралелограм со дадени страни $a = 4$ cm и $b = 3$ cm и дијагонала $f = 6$ cm.

За конструкција на правоаголник или ромб потребни и доволни се два елементи, меѓу кои барем еден е дадена должина, а за конструкција на квадрат потребен е само една дадена должина.

Пример 3

Конструирај правоаголник $ABCD$, ако се дадени една страна a и дијагонала d.

Конструкцијата се изведува на тој начин што прво го конструираме правоаголниот триаголник ABC со катета a и хипотенуза d. Потоа над дијагоналата AC се конструира триаголник ACD со три дадени страни. Така го добиваме правоаголникот $ABCD$ (црт. 3). Постои само еден таков правоаголник.



а) дадени податоци б) скица в) конструкција

црт. 3

Задача 3

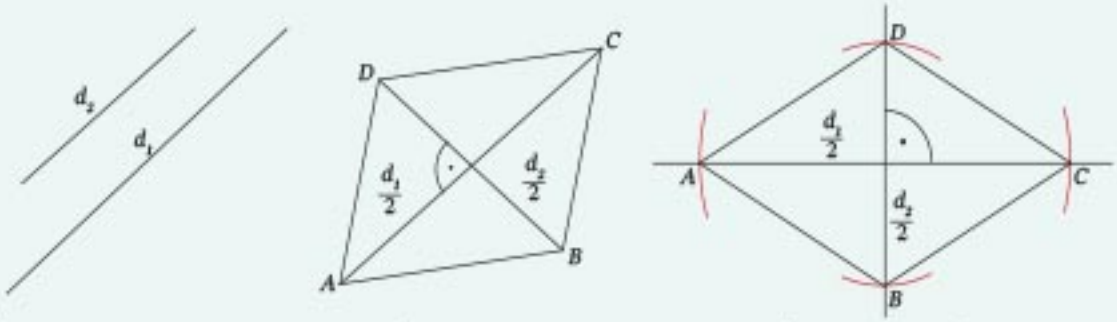
Конструирај правоаголник $ABCD$, ако се дадени:
а) страната $b = 3$ cm и дијагоналата $d = 5$ cm,
б) дијагонала $d = 5$ cm и агол помеѓу дијагоналите $\alpha = 40°$.

Упатство: Направи скица на бараниот правоаголник. Потоа нацртај агол α и продолжи ги неговите краци до прави. Искористи го својството дека дијагоналите на правоаголник се еднакви меѓу себе и се преполовуваат.

Пример 4

Конструирај ромб $ABCD$, ако се дадени двете дијагонали d_1 и d_2.

Прво конструираме две заемно нормални прави. Од пресечната точка пренесуваме по едната права половинки од едната дијагонала, а по другата права половинки од втората дијагонала. Така се добиваат точките A, B, C и D на цртеж 4. Со нивно сврзување се добива ромбот $ABCD$. Постои единствен таков ромб.



а) дадени податоци б) скица в) конструкција

црт. 4

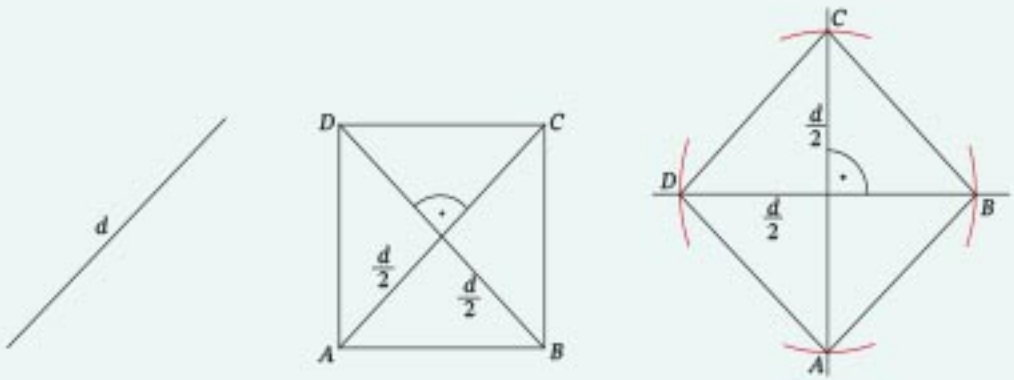
Задача 4

Конструирај ромб $ABCD$, ако се дадени:
а) страната $a = 3$ cm и една дијагонала $d_2 = 5$ cm,
б) двете дијагонали $d_1 = 10$ cm и $d_2 = 64$ mm.

Пример 5

Конструирај квадрат $ABCD$ со дадена дијагонала d.

Прво конструираме две заемно нормални прави. Од пресечната точка пренесуваме по една половинка од дијагоналата по двете прави. Така се добиваат точките A, B, C и D на цртеж 5. Со нивно сврзување се добива квадратот $ABCD$. Постои единствен таков квадрат.



црт. 5

Задача 5

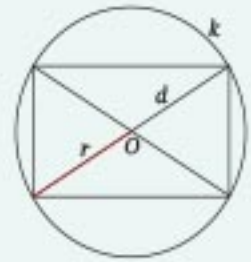
Конструирај квадрат со страна $a = 3{,}5$ cm.

Конструкции на опишана и впишана кружница

Пример 6

Опиши кружница k околу даден правоаголник со дијагонала d.

а) На цртеж 6 е даден правоаголник со дијагонала d. Според својствата на правоаголник, пресекот на неговите дијагонали O е еднакво оддалечен од сите негови темиња. Затоа конструираме кружница k со центар во O и радиус r половина од дијагоналата, односно $r = \frac{d}{2}$. Кружницата $k(O, r)$ минува низ секое теме на правоаголникот, односно е опишана кружница околу правоаголникот. Постои единствена таква кружница.



црт. 6

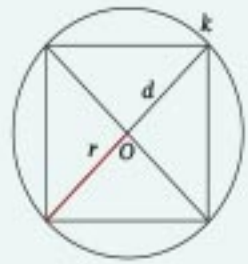
Задача 6

Опиши кружница k околу даден правоаголник со страни $a = 5$ cm и $b = 3$ cm.
Упатство: Конструирај го правоаголникот и повлечи ги неговите дијагонали.

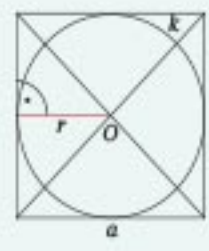
Пример 7

а) Опиши кружница k околу квадратот со дијагонала d.
б) Впиши кружница k во квадратот со страна a.

а) На цртеж 7а е даден квадрат со дијагонала d. Според својствата на квадрат, пресекот на неговите дијагонали O е еднакво оддалечен од сите негови темиња. Затоа конструираме кружница k со центар во O и радиус r половина од дијагоналата, односно $r = \frac{d}{2}$. Кружницата $k(O, r)$ минува низ секое теме на квадратот, односно е опишана кружница околу квадратот. Постои единствена таква кружница.



црт. 7а



црт 7б

б) На цртеж 7б е даден квадрат со страна a. Пресекот на неговите дијагонали O е еднакво оддалечен и од неговите страни. Затоа радиусот r на впишаната кружница k е половина од неговата страна, односно $r = \frac{a}{2}$. Кружницата $k(O, r)$ ги допира сите негови страни, односно е впишана кружница во квадратот. Постои единствена таква кружница.

Задача 7

а) Опиши кружница k околу квадрат со страна $a = 4$ cm.
б) Впиши кружница k во квадрат со страна $a = 5$ cm.

Задача 8

Архитектите дизајнираат нов дел во градскиот парк. Тој се состои од два дела кои ги опишале само со зборови. Првиот дел е цветник во форма на правоаголник со светлечка кружница што минува низ секое теме на правоаголникот. Вториот дел има форма на квадрат и во него има фонтана што ја допира секоја страна на квадратот и светлечка кружница што минува низ секое теме на квадратот. Конструирај ги деловите што ги опишале архитектите.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Конструирај паралелограм $ABCD$ со дадени:
   а) страни $a = 3$ cm, $b = 6$ cm и дијагонала $f = 4$ cm,
   б) дијагоналите $d_1 = 7$ cm, $d_2 = 5$ cm и аголот меѓу нив $\alpha = 75°$.

2. Конструирај ромб $ABCD$, ако се дадени:
   а) дијагоналите $d_1 = 7$ cm, $d_2 = 5$cm, б) страната $a = 5$ cm и остриот агол 45°,
   в) страната $a = 4$ cm и висината $h = 3$ cm,
   г) дијагоналата $d_1 = 7$ cm и висината $h = 4$ cm.

3. Конструирај правоаголник $ABCD$ со дадени:
   а) страни $a = 4{,}5$ cm и $b = 3$ cm, б) страна $b = 3{,}5$ cm и дијагонала $d = 5{,}5$ cm.

4. Општината одлучила да изгради мал ботанички парк составен од четири соседни парцели со различна форма: паралелограм, ромб, правоаголник и квадрат.
   Архитектот ги оставил само следните описни белешки:
   - Парцелата А има два пара паралелни страни долги 8 m и 6 m. Соседните страни не се еднакви. Во овој дел се планира засадување на ароматични билки.
   - Парцелата Б има четири еднакви страни по 7 m, а едната дијагонала е подолга од другата.
     Во овој дел се планира засадување на рози во кружен распоред.
   - Парцелата В има агли од 90°, а соседните страни се долги 5 m и 9 m. Овој дел ќе се користи за поставување клупи.
   - Парцелата Г има четири страни по 6 m и сите агли се прави. Ова ќе биде детско катче со песок.

   Препознај ги, а потоа со користење на размер конструирај ги формите што ги опишал архитектот.

5. Опиши кружница k околу правоаголник со страна $a = 3$ cm и дијагонала $d = 5$ cm.

6. Впиши кружница k во квадрат со дадена страна $a = 4$ cm.

7. Опиши кружница k околу квадрат со дадена дијагонала $d = 6$ cm.

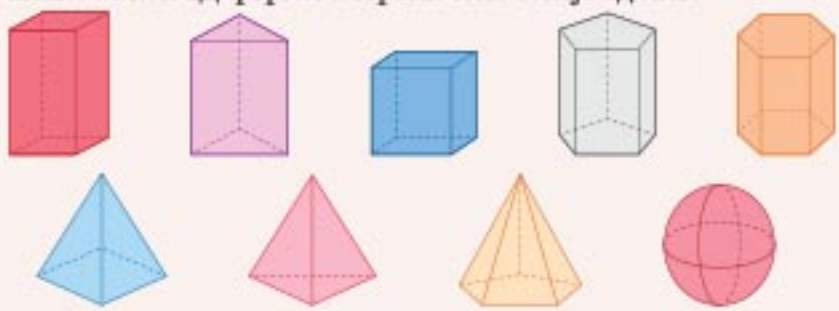
Истражување

1. Андреј нацртал кружница, но не го означил центарот на кружницата, а не го знаел ниту радиусот на кружницата. Помогни му на Андреј да ги најде центарот и радиусот на кружницата. Доколку имаш можност искористи образовен софтвер за да му помогнеш на Андреј.
2. Ариф се обидува да впише кружница во правоаголник што не е квадрат. Објасни зошто Ариф е во заблуда.

13. ПОЛИЕДАР, ТОПКА И СФЕРА

Активност

Именувај ги 3Д-формите на цртеж 1. Кои од нив се рабести, а кои се валчести 3Д-форми? Опиши со кои 2Д-форми е ограничена секоја од нив.



црт. 1

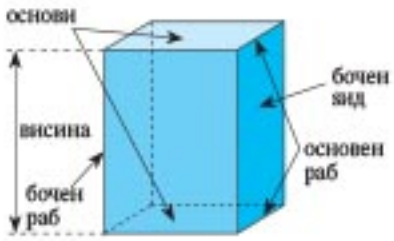
Тридимензионалните форми (3Д) се дел од просторот и нив ги изучува делот од геометрија наречен **стереометрија**, за разлика од рамнинските 2Д-форми што ги изучува **планиметријата**. Една од најчесто користени 3Д-форми се полиедрите.

Полиедар е дел од просторот ограничен со многуаголници (триаголници, четириаголници, петаголници итн.).

При скицирање на полиедрите, видливите рабови се цртаат со полна линија, додека невидливите рабови се цртаат со испрекината линија.
Досега се запознавме со два вида на полиедри: **призми** и **пирамиди**.

Призмите имаат две складни паралелни основи кои се многуаголници (црт. 2).
Отсечките што ги поврзуваат соодветните темиња на основите се меѓусебно паралелни и се нарекуваат **бочни рабови**.
Рабовите што се дел од основите односно страните на основите се нарекуваат **основни рабови**.

Паровите основни рабови, заедно со соодветните бочни рабови формираат паралелограми, кои се нарекуваат **бочни ѕидови** на призмата.
За една призма ќе велиме дека е **права призма**, ако паралелните рабови се нормални на двете основи.
Ние ќе разгледуваме само прави призми. Во зависност од тоа каков многуаголник претставуваат основите, призмата може да биде триаголна, четириаголна, итн.

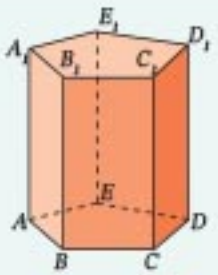


црт. 2

Пример 1

За петаголната призма на цртеж 3, запиши ги сите нејзини:
а) темиња, б) бочни рабови, в) основни рабови, г) бочни ѕидови, д) основи.

а) Темиња се точките: $A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1$ и E_1,
б) Бочни рабови се отсечките: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 и EE_1,
в) Основни рабови се отсечките:
$AB, BC, CD, ED, EA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1$ и E_1A_1,
г) Бочни ѕидови се правоаголниците:
$ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1$ и EAA_1E_1,
д) Основи се петаголниците: $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$.



црт. 3

Ако основите на една права призма се правилни многуаголници, таа призма се нарекува **правилна призма**.
Растојанието помеѓу основите на призмата се нарекува **висина** на призмата и најчесто се означува со H.

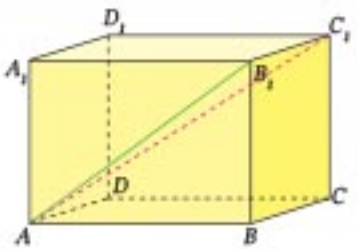
Задача 1

Колку бочни рабови има: а) осумаголна призма, б) дванеасетаголна призма?

За една дијагонала во полиедарот велиме дека е **просторна**, ако таа поврзува две темиња од полиедарот и не припаѓа на некој ѕид на полиедарот.

Пример 1

Квадарите се призми коишто се ограничени со три пара паралелни правоаголници. На цртеж 4 е даден квадарот $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чии рабови имаат должини a, b и c. Една просторна дијагонала е отсечката AC_1. Отсечката AB_1 не е просторна дијагонала, бидејќи е дел од ѕидот ABB_1A_1.



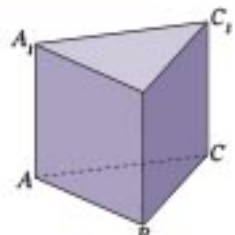
црт. 4

Задача 2

Именувај ги сите дијагонали на квадарот на цртеж 4. Кои од нив се просторни, а кои не се просторни?

Пример 3

На цртеж 5 е дадена триаголна призма $ABCA_1B_1C_1$. Објасни зошто оваа призма нема просторна дијагонала.

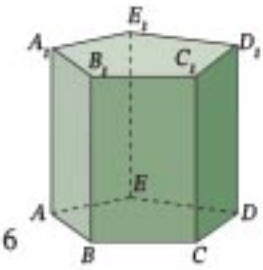


црт. 5

Во дадената призма секоја отсечка чии крајни точки се две темиња на призмата лежи на некој ѕид на призмата или претставува раб.

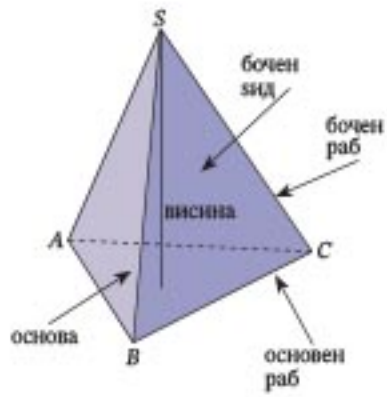
Задача 3

Запиши ги сите просторни дијагонали на призмата на цртеж 6.



црт. 6

Пирамидата за основа има многуаголник и има едно теме наречено **врв** што не лежи во рамнината на основата (црт. 7).
Отсечките кои го поврзуваат врвот и темињата на основата се нарекуваат **бочни рабови**.
Рабовите кои се страни на основата се нарекуваат **основни рабови**.
Секој основен раб, заедно со соодветните два бочни рабови образуваат триаголници, кои се нарекуваат **бочни ѕидови** на пирамидата.
Пирамидите можат да бидат триаголни, четириаголни, итн. во зависност од тоа каков многуаголник претставува нивната основа.



црт 7

Пример 4

За триаголната пирамида на цртеж 7:
а) запиши ги сите нејзини: темиња, бочни рабови, основни рабови, бочни ѕидови,
б) запиши го врвот и основата.

а) Темиња се точките A, B, C и S; бочни рабови се отсечките AS, BS и CS; основни рабови се отсечките AB, BC и CA; бочни ѕидови се триаголниците ABS, BCS и CAS.
б) Врвот е темето S, а основата е триаголникот ABC.

Ако основата на пирамидата е правилен многуаголник и сите нејзини бочни рабови имаат иста должина, таа пирамида се нарекува **правилна пирамида**.
Растојанието од врвот на пирамидата до основата се нарекува **висина** на пирамидата и најчесто се означува со H.
Триаголна пирамида се нарекува тетраедар, бидејќи има 4 темиња. Но, често пати под тетраедар се подразбира правилна триаголна пирамида чии ѕидови се рамностран триаголници.

Задача 4

Колку основни рабови има: а) петнаесетаголна пирамида, б) дваесетаголна пирамида.

Пример 3

Дали во пирамидата има просторна дијагонала?

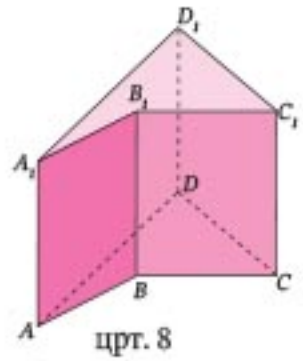
Отсечката што го поврзува врвот на една пирамида со некое од темињата на основата претставува раб на пирамидата, и таа не може да биде дијагонала. Отсечката која поврзува две темиња од основата, по дефиниција не е просторна дијагонала. Затоа пирамидите немаат просторни дијагонали.

Пример 4

Знаеме дека триаголна призма нема просторни дијагонали. Исто така, знаеме дека пирамидите немаат просторни дијагонали. Но, ако врз правилна тристрана призма $ABCA_1B_1C_1$ поставиме правилна пирамида $A_1B_1C_1S$, добиваме полиедар што не е ниту призма ниту пирамида. Тој има три просторни дијагонали AS, BS и CS.

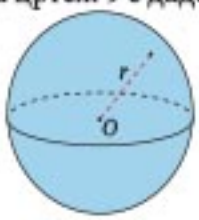
За еден полиедар велиме дека е **конвексен**, ако отсечката која поврзува кои било две точки од полиедарот припаѓа на полиедарот.

Конвексни полиедри се, на пример, триаголните призми и триаголните пирамиди.
На цртеж 8 даден е полиедар што не е конвексен.
На пример, отсечката AC не е дел од полиедарот.

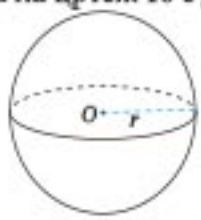


црт. 8

Топка е множеството од сите точки во просторот што се наоѓаат на еднакво или помало растојание r од една дадена точка O. **Сфера** е множество точки во просторот што се наоѓаат на растојание r од дадена точка O. На цртеж 9 е дадена топка со радиус r, а на цртеж 10 е дадена сфера со радиус r.



црт. 9



црт. 10

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Што е полиедар, а што е конвексен полиедар? Нацртај еден конвексен полиедар.
2. Нацртај полиедар што не е ниту призма ниту пирамида.
3. Нацртај шестаголна призма и означи ја. Запиши ги сите нејзини:
   а) темиња, б) бочни рабови, в) основни рабови, г) бочни ѕидови, д) основи.
4. Нацртај триаголна призма и на двете нејзини основи нацртај две правилни триаголни пирамиди. Потоа нацртај ги во боја сите просторни дијагонали на добиениот полиедар.
5. Нацртај седумаголна пирамида и означи ја.
   а) запиши ги сите нејзини: темиња, бочни рабови, основни рабови, бочни ѕидови,
   б) запиши го врвот и основата.
6. Колку основни рабови има: а) десетаголна призма, б) дваесетаголна пирамида?
7. Колку темиња има: а) стоаголна пирамида, б) стоаголна призма?
8. Колку бочни рабови има:
   а) деветаголна призма, б) десетаголна пирамида?
9. Од кои 3Д-форми е составена куќата на цртеж 11?



црт. 11

10. Што е топка, а што е сфера? Набројте примери од твојата околина на топка и сфера.

Истражување

Каква пирамида е Кеопсовата пирамида во Египет? Дали е триаголна, четириаголна, итн.? Дали е правилна пирамида?
Побарај на интернет информации за димензиите (рабовите) на Кеопсовата пирамида.
Изработи модел од картон на Кеопсовата пирамида во размер 1 : 1000.

14. ПРАВИЛНИ ПОЛИЕДРИ

Активност

1. Како се нарекува многуаголник со еднакви страни и еднакви агли?

2. Кои од многуаголниците на цртеж 1 се правилни, а кои не се правилни?



црт. 1

3. Какви многуаголници се ѕидовите на коцката, а какви ѕидовите на тетраедарот на цртеж 2?

црт. 2



Ако добро согледа ѕидовите на тетраедарот и коцката се правилни многуаголници. Поточно, ѕидовите на тетраедарот се рамностранитриаголници, а ѕидовите на коцката се квадрати.

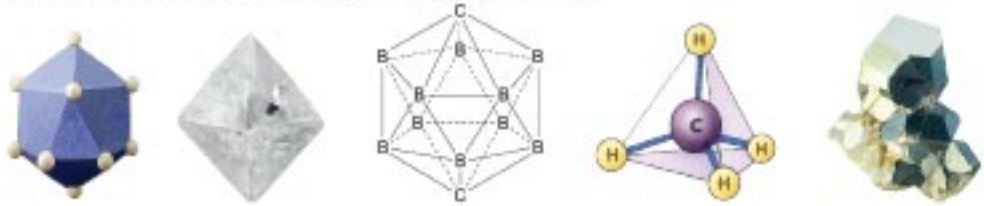
За еден полиедар велиме дека е **правилен**, ако неговите ѕидови се правилни и складни многуаголници.

Постојат само пет видови правилни полиедри и тие им биле познати уште на античките математичари. Правилните полиедри се нарекуваат уште и Платонови тела, според името на античкиот филозоф Платон.

Во следната табела се дадени сите видови правилни полиедри. Запишани се бројот на темиња, рабови и ѕидови, како и видот на правилните многуаголници што ги покриваат.

	име	темиња	рабови	ѕидови	вид на правилен многуаголник	број на рабови по теме
	тетраедар	4	6	4	рамностран триаголник	3
	коцка	8	12	6	квадрат	3
	октаедар	6	12	8	рамностран триаголник	4
	додекаедар	20	30	12	правилен петаголник	3
	икосоедар	12	30	20	рамностран триаголник	5

Интересна е појавата на правилните полиедри во природата. На пример, аденовирусот има обвивка во форма на икосоедар, изомерите на бор образуваат тетраедарски, октаедарски или икосоедарски форми, а молекулите често имаат тетраедарска или октаедарска геометрија. Дијамантите често кристализираат во форма на октаедри, а минералот пирит кристализира во форма на коцка, октаедар или додекаедар (слика 1).



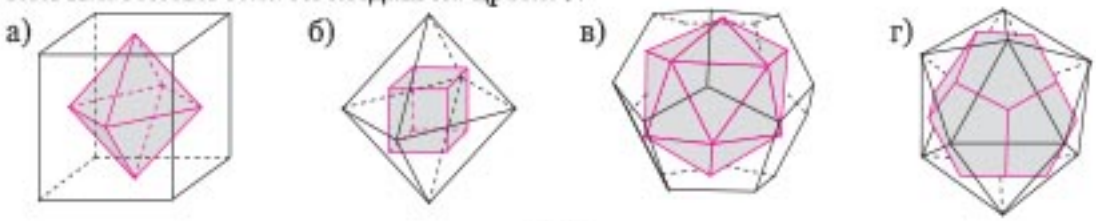
Аденовирус Дијамант Изомер на бор Молекула Пирит

слика 1

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

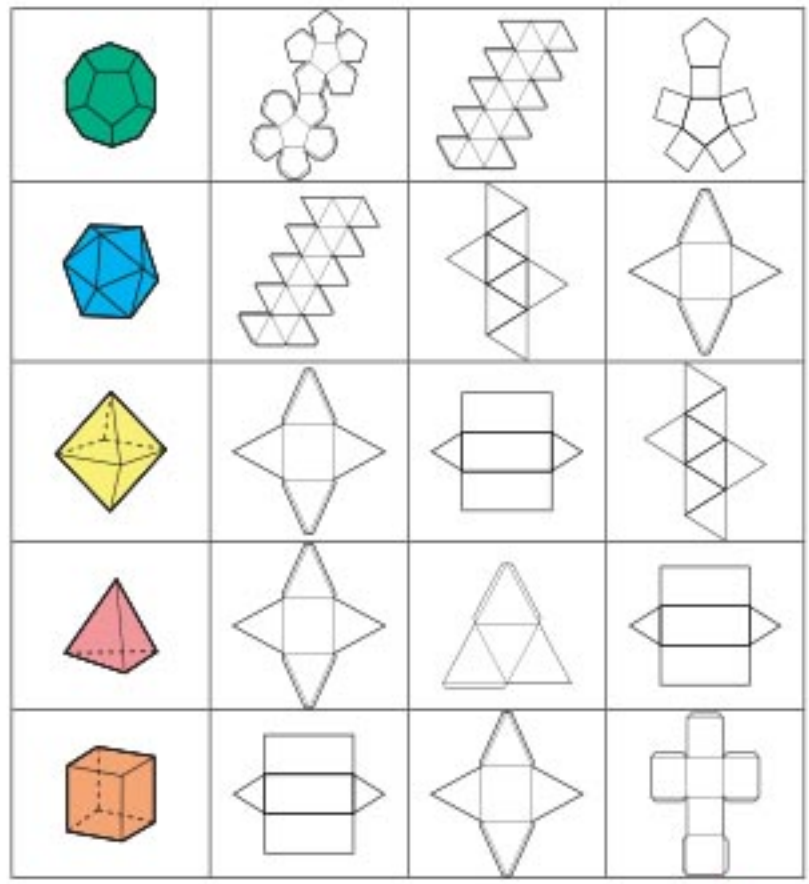
1. а) Набројги сите пет видови правилни полиедри.
б) Со кои правилни многуаголници е покриен секој од нив?
в) По колку рабови излегуваат од секое теме кај секој од нив?

2. Кои Платонови тела ги гледаш на цртеж 3:



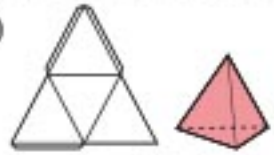
црт. 3

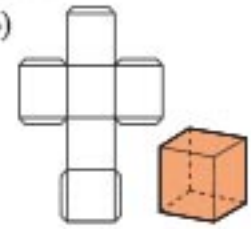
3. Која од трите мрежи му одговара на секое дадено тело?

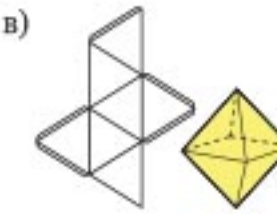


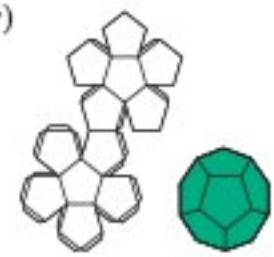
4. Проектна активност

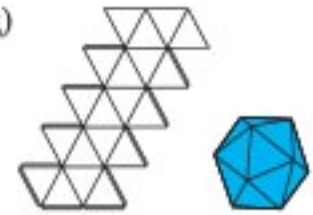
1) Според дадената мрежа и димензии, изработи модел на телото, ако
а) страната на триаголникот е 7 cm, б) страната на квадратот е 5 cm,
в) страната на триаголникот е 4 cm, г) страната на петаголникот е 3 cm,
д) страната на триаголникот е 2 cm.

а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

2) На хамер нацртај ја табелата, запиши ги податоците за секоја фигура, а моделот залепи го во последната редица.

					
име					
ѕидови					
рабови					
темиња					
модел					

Истражување

Откривањето на Платоновите тела почнало со дефинирање на три од телата од страна на групата старогрчки математичари наречени Питагорејци, а старогрчкиот математичар Платон ги дефинирал и последните две. Платон ги опишувал петте тела како симболи на петте основни елементи на светот: оган, воздух, вода, земја и етер (универзум).

Истражи на интернет:

а) Кој елемент на кое тело му го доделил Платон?

б) Како притоа ја објаснувал симболиката?

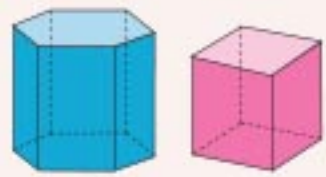
в) Како Јоханес Кеплер ги применил Платоновите тела во своите истражувања?



15. ВРСКА ПОМЕЃУ БРОЈОТ НА ТЕМИЊА, РАБОВИ И SИДОВИ КАЈ ПОЛИЕДРИТЕ

Активност

На цртеж 1 се дадени два конвексни полиедри.
За секој од нив изброј ги нивните темиња, одземи го бројот на рабови и додај го бројот на sидови.
Што забележуваш? Дали постои врска меѓу бројот на темиња, рабови и sидови на дадените полиедри?



црт. 1

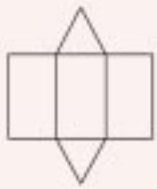
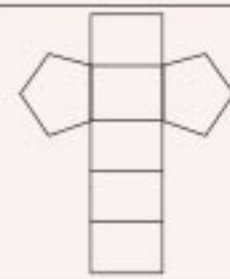
За секој конвексен полиедар важи **Ојлеровата формула**

$$V - E + F = 2$$

каде што V е бројот на темиња, E е бројот на рабови и F е бројот на sидови на полиедарот.

Активност

Прецртај ги мрежите на полиедрите дадени во табелата на картон, исечи ги и состави ги полиедрите.
а) Определи го бројот на темиња, рабови и sидови на секој полиедар.
б) Провери ја Ојлеровата формула на секој полиедар.

триаголна призма	четириаголна пирамида	петаголна призма	шестаголна пирамида
			

Пример 1

Провери ја Ојлеровата формула за:
а) триаголна пирамида, б) четириаголна призма, в) петаголна пирамида.

а) триаголна пирамида
$V = 4, E = 6$ и $F = 4$
$V - E + F = 4 - 6 + 4 = 2$

б) четириаголна призма
$V = 8, E = 12$ и $F = 6$
$V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2$

в) петаголна пирамида
$V = 6, E = 10$ и $F = 6$
$V - E + F = 6 - 10 + 6 = 2$

Задача 1

Провери ја Ојлеровата формула за секое Платоново тело:
а) тетраедар, б) коцка, в) октаедар, г) додекаедар, д) икосоедар.

Пример 2

Со помош на Ојлеровата формула провери дали постои конвексен полиедар со 6 темиња, 12 рабови и 5 ѕидови.

$V = 6, E = 12,$ и $F = 5$
$V - E + F = 6 - 12 + 5 \neq 2$ Не постои конвексен полиедар со дадените услови.

Задача 2

Дали постои конвексен полиедар со 20 темиња, 40 рабови и 20 страни?

Ојлеровата формула се применува при пресметување на непознат број на темиња, рабови или ѕидови.

Пример 3

Колку ѕидови има конвексен полиедар со 15 темиња и 28 рабови?

Според условот во задачата $V = 15$ и $E = 28$. Со замена на познатите вредности во Ојлеровата формула, добиваме
$V - E + F = 2,\ 15 - 28 + F = 2, F = 15.$
Дадениот конвексен полиедар има 15 рабови.

Задача 3

Колку темиња има конвексен полиедар со 40 рабови и 21 ѕид?

Задача 4

Ученици креираат дрон со тело во форма на полиедар со 22 ѕидови и 36 рабови.
Колку темиња има телото на дронот?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Со помош на Ојлеровата формула провери дали постои конвексен полиедар со 7 темиња, 18 рабови и 12 ѕидови.
2. Еден конвексен полиедар има 16 темиња и 10 страни. Колку рабови има тој полиедар?
3. Колку темиња има полиедар со 36 раба и 14 страни?
4. Нацртај полиедар составен од коцка и правилна четириаголна пирамида кои имаат заедничка страна. Потоа за полиедарот провери го равенството $V - E + F = 2$.
5. Нацртај полиедар составен од две четириаголни пирамиди кои имаат заедничка основа. Потоа за полиедарот провери го равенството $V - E + F = 2$.

Истражување

1. Дали полиедрите дадени на цртеж 2 не се конвексни? Колку „дупки“ има секој од нив?
   а) За секој полиедар, изброј ги неговите темиња, неговите рабови и неговите страни.
   б) Пресметај ја вредноста на изразот $V - E + F$ за секој полиедар.
   в) Дали важи формулата $V - E + F = 2 - 2 \cdot d$, каде што d е бројот на „дупки“ кај полиедарот?
   г) Дали со секоја нова дупка, вредноста на изразот $V - E + F$ се намалува за 2?



црт. 2

16. ЦРТАЊЕ СЛОЖЕНИ 3Д-ФОРМИ

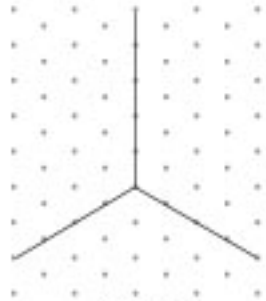
За цртање на сложени 3Д-форми во рамнина можеме да користиме **изометриска хартија**. На неа е нацртана мрежа формирана од паралелни низи со точки, такви што секои две соседни точки од низата се на еднакво растојание, а со најблиската точка од соседната низа образуваат рамностран триаголник. Важно е правилно да ја поставиме хартијата, така што споменатите низи од точки да бидат поставени вертикално (цртеж 1а), а не хоризонтално (цртеж 1б). Тоа ни овозможува да поставиме координатен систем со три оски, под агол од 120°, како на цртеж 1в. При цртање на изометриска хартија, односите меѓу димензиите на нацртаната 3Д-форма се исти со односите меѓу димензиите на дадената 3Д-форма.



црт. 1а



црт. 1б

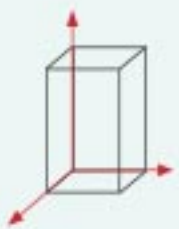


црт. 1в

Пример 1

Нацртај, на изометриска хартија, квадар со димензии 3, 4 и 5 единици.

На цртеж 2а е дадена скица на квадарот. На изометриската хартија цртаме координатен систем со оски под агол од 120°. На координатните оски ги нанесуваме должините на рабовите: 3, 4 и 5 единици, соодветно (црт. 2б).



Црт. 2а



црт. 2б

Според скицата ги цртаме трите видливи вертикални рабови (црт. 2в). Потоа ги цртаме сите останати видливи рабови што се паралелни на другите две оски (црт. 2г). На крај ги цртаме невидливите рабови со испрекинати или потенки линии (црт. 2д).



црт. 2в



црт. 2г



црт. 2д

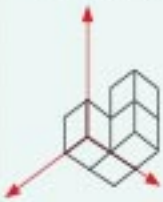
Пример 2

Од колку коцки е составена 3Д-формата на цртеж 3?
Нацртај ја 3Д-формата на изометриска хартија.



црт. 3

3Д-формата на цртеж 3 се состои од 4 коцки.
На цртеж 4а е дадена скица на 3Д-формата.
На изометриската хартија цртаме координатен систем со оски под агол од 120°.
Понатаму, според скицата, ги цртаме првите три раба долж оските (црт. 4б).
Продолжуваме со цртање на вертикалните рабови, според скицата (црт. 4в).
Потоа ги цртаме сите останати рабови кои се паралелни на другите две оски (црт. 4г).
На цртеж 4д е даден изометрискиот цртеж на дадената 3Д-форма.



црт. 4а



црт. 4б



црт. 4в



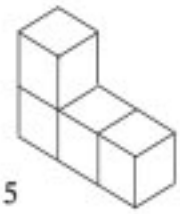
црт. 4г



црт. 4д

Задача 1

Од колку коцки е составена 3Д-формата на цртеж 5?
Нацртај ја на изометриска хартија 3Д-формата.



црт. 5

Задача 2

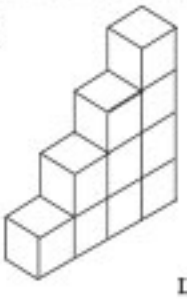
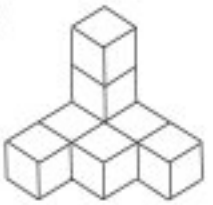
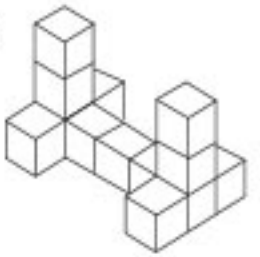
Нацртај ги саксиите, претставени на цртеж 8, на изометриска хартија:



црт. 8

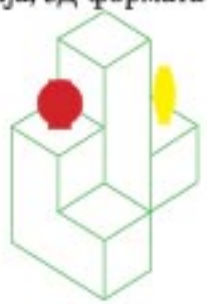
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Нацртај ја на изометриска хартија 3Д-формата на цртеж 9:

а)  б)  в)  г) 

црт. 9

2. Нацртај ја, на изометриска хартија, 3Д-формата (витрината) на цртеж 10:



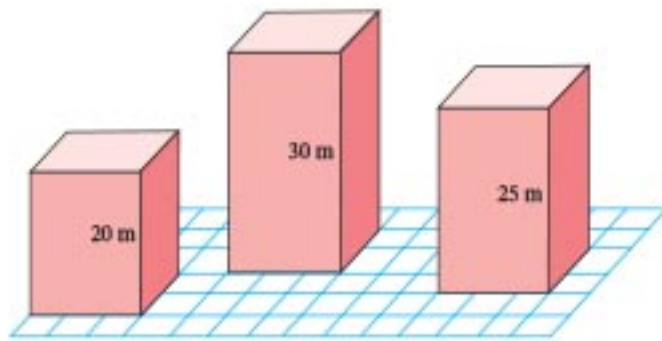
црт. 10

3. Проектна задача

Дадена е скица на еден станбено-деловен комплекс што се состои од три згради сместени над трговски центар што се наоѓа на приземјето. На просторот околу зградите е предвидено хортикултурно уредување и детско игралиште.

Секое квадратче од скицата на терен е квадрат со страна 5 m.

1) Според скицата на цртеж 11, нацртај на изометриска хартија цртеж на комплексот, сметајќи дека 5 m на терен се претставени со единечна отсечка на изометриската хартија.
2) Изработи макета на комплексот според следните упатства:
   - должината на единечната отсечка, која на терен е 5 m, на макетата ќе биде 5 cm,
   - приземјето направи го од стиропор со дебелина 5 cm,
   - моделите на зградите изработи ги од картон,
   - нацртај врати и прозорци, внимавајќи на димензиите (на секои околу 3 m висина на зградата има по еден кат),
   - залепи ги зградите на стиропорот според планот,
   - уреди го просторот околу зградите по сопствена замисла.



црт. 11

17. КОМБИНАЦИИ ОД ТРАНСЛАЦИИ, РОТАЦИИ И ОСНИ СИМЕТРИИ

Активност

Во правоаголен координатен систем означи точка $A(2, 1)$.

а) Изврши транслација на точката A за 5 единици налево и 3 единици надолу. Означи ја нејзината слика со A_1.

б) Најди ја сликата A_2 на точката A_1 при осна симетрија со оска $y = -2$.

в) Означи ја со A_3 сликата на точката A_2 при ротација со центар (0,1) и агол 90^0 во насока спротивна на стрелките на часовникот.

Наша задача ќе биде да направиме комбинации од две движења (транслации, осни симетрии или ротации) и да ја најдеме сликата на даден оригинал, во однос на избран координатен систем.

Пример 1

Даден е триаголник ABC со темиња во точките $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ и $C(4, 3)$. Дадени се осна симетрија со оска на симетрија $y = 0$ и ротација со центар во точката $(0, 0)$ за агол $90°$, во насока спротивна на стрелките на часовникот.

Андреј првин ја применува осната симетрија, а потоа ротацијата (црт. 1а), додека Адмир првин ја применува ротацијата, а потоа осната симетрија (црт. 1б).

Дали тие добиле иста слика на триаголникот ABC?

Андреј ги добива последователно триаголниците:

$A(1, 1) \to D(1, -1) \to G(1, 1)$

$B(3, 1) \to E(3, -1) \to H(1, 3)$

$C(4, 3) \to F(4, -3) \to J(3, 4)$

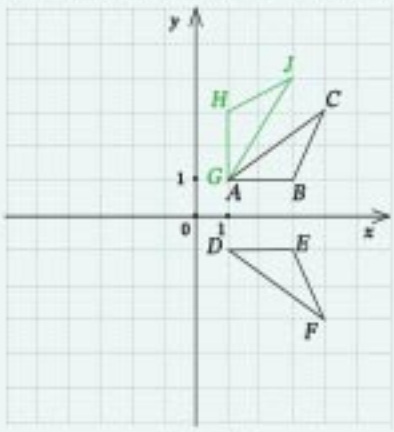
Адмир ги добива последователно триаголниците:

$A(1, 1) \to K(-1, 1) \to N(-1, -1)$

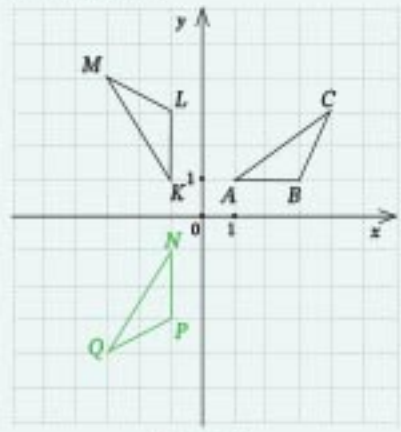
$B(3, 1) \to L(-1, 3) \to P(-1, -3)$

$C(4, 3) \to M(-3, 4) \to Q(-3, -4)$

Андреј и Адмир не добиле иста слика на триаголникот ABC.



црт. 1а



црт. 1б

Задача 1

Даден е триаголник ABC со темињата $A(-2, 3)$, $B(1, 0)$ и $C(3, 2)$.

а) Изврши ротација на триаголникот ABC околу темето B за $90°$ во насока спротивна од насоката на стрелките на часовникот.

б) Потоа изврши осна симетрија на добиената слика на триаголникот ABC во однос на правата $y = x$.

в) Изврши ги трансформациите по обратен редослед. Дали ја доби истата слика на триаголникот ABC?

Пример 2

Даден е триаголник ABC со темиња во точките $A(-2, 1)$, $B(-2, 0)$ и $C(0, 0)$. Дадени се осна симетрија во однос на y-оската и транслација за 3 единици во десно и 1 единица нагоре. Арта прво ја применува осната симетрија, а потоа транслацијата (црт. 2а), додека Ана прво ја применува транслацијата, а потоа осната симетрија (црт. 2б). Дали тие добиле иста слика на триаголникот ABC?

Арта ги добива последователно триаголниците:

$A(-2, 1) \to D(2, 1) \to G(5, 2)$

$B(-2, 0) \to E(2, 0) \to H(5, 1)$

$C(0, 0) \to F(0, 0) \to J(3, 1)$

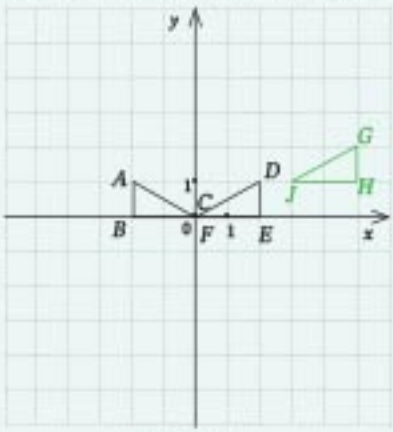
Ана ги добива последователно триаголниците:

$A(-2, 1) \to K(1, 2) \to N(-1, 2)$

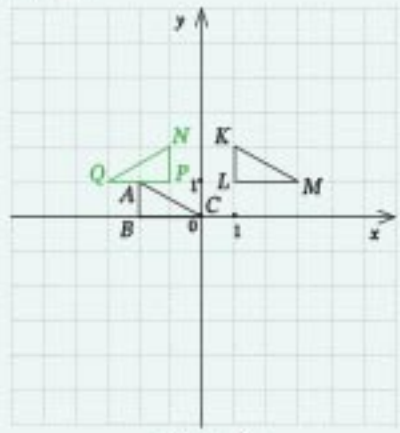
$B(-2, 0) \to L(1, 1) \to P(-1, 1)$

$C(0, 0) \to M(3, 1) \to Q(-3, 1)$

Арта и Ана не добиле иста слика на триаголникот ABC.



црт. 2а



црт. 2б

Задача 2

Нацртај триаголник ABC со темињата $A(0, 2)$, $B(4, 1)$ и $C(2, 5)$.

а) Најди ја сликата на триаголникот ABC при осна симетрија во однос на x-оската.

б) Изврши транслација на добиената слика на триаголникот ABC за 4 единици налево и 5 единици нагоре.

в) Изврши ги трансформациите по обратен редослед. Дали ја доби истата слика на триаголникот ABC?

Пример 3

Даден е триаголник со темиња во точките $A(-1, -1)$, $B(-1, -2)$, $C(1, -2)$. Дадени се ротација за агол 90° во насока спротивна од стрелките на часовникот и центар во координатниот почеток, и транслација за 1 единица во лево и 3 единици надолу. Мила прво ја применува ротацијата, а потоа транслацијата (црт. 3а) додека Мерлинда прво ја применува транслацијата, а потоа ротацијата (црт. 3б). Дали тие ќе добијат иста слика на триаголникот ABC?

Мила ги добива последователно триаголниците:

$A(-1, -1) \to D(1, -1) \to G(0, -4)$

$B(-1, -2) \to E(2, -1) \to H(1, -4)$

$C(1, -2) \to F(2, 1) \to J(1, -2)$

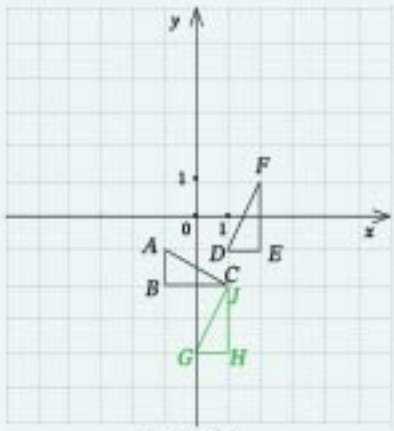
Мерлинда ги добива последователно триаголниците:

$A(-1, -1) \to K(-2, -4) \to N(4, -2)$

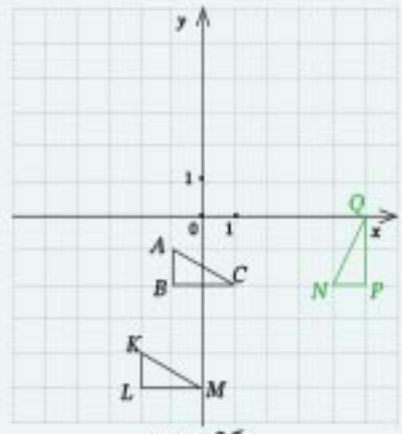
$B(-1, -2) \to L(-2, -5) \to P(5, -2)$

$C(1, -2) \to M(0, -5) \to Q(5, 0)$

Мила и Мерлинда не добиле иста слика на триаголникот ABC.



црт. 3а



црт. 3б

Задача 3

Во правоаголен координатен систем нацртај триаголник ABC со координати на темињата $A(1, 0)$, $B(5, 1)$ и $C(1, 4)$.

а) Изврши ротација околу темето A за 90° во насока спротивна од насоката на стрелките на часовникот.

б) Изврши транслација на сликата налево за 2 единици и надолу за 5 единици.

в) Изврши ги трансформациите по обратен редослед. Дали ја доби истата слика на триаголникот ABC?

Активност

Даден е триаголник со темиња во точките $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, $C(3, 3)$. Дадени се ротација за 180° околу координатниот почеток и осна симетрија во однос на x-оската. Дали редоследот на извршување на трансформациите е битен?

Задача 4

Даден е правоаголник со темиња во точките $P(2, 1)$, $Q(6, 1)$, $R(6, 4)$ и $S(2, 4)$. Извршени се две последователни трансформации: ротација за 180°, спротивно од стрелките на часовникот околу координатниот почеток, и осна симетрија во однос на y – оската.

а) Најди ги координатите на точките P, Q и R по ротацијата. Означи ги со P_1, Q_1 и R_1.

б) Најди ги координатите на точките P_1, Q_1 и R_1 по осната симетрија.
Означи ги со P_2, Q_2 и R_2.

в) Објасни дали ќе добиеш исти точки ако се смени редоследот на двете трансформации.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

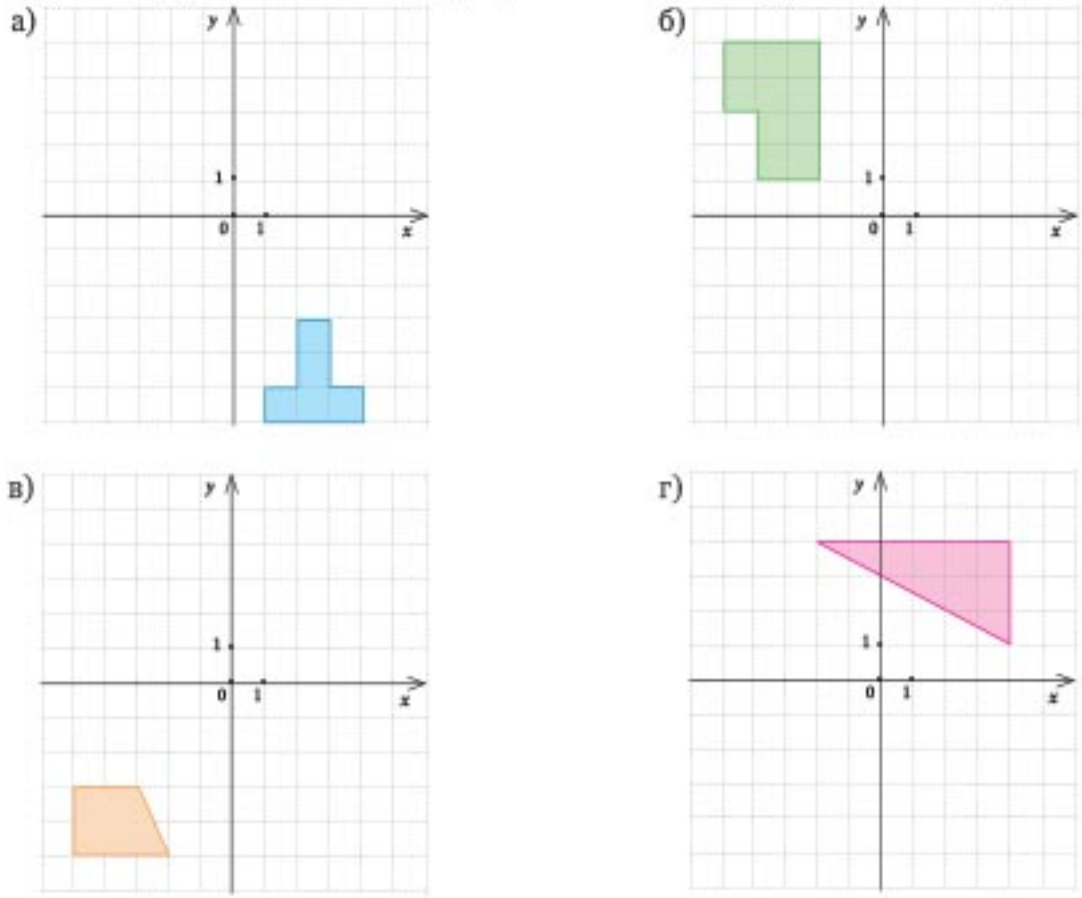
1. Врз дадената форма на цртеж 4, изврши ги следните трансформации:

а) осна симетрија во однос на x-оската, потоа транслација за 3 налево и за 4 нагоре,

б) ротација за 180° со центар во (–1,0), потоа осна симетрија во однос на правата $y = 1$,

в) осна симетрија во однос на правата $y = -1$, потоа ротација за 90° со центар (0, –3) во насока спротивна од стрелките на часовникот,

г) транслација за 3 налево и 5 надолу, потоа осна симетрија во однос на правата $x = -1$.



црт. 4

2. Во правоаголен координатен систем нацртај триаголник ABC со координати на темињата $A(0, 2)$, $B(4, 1)$ и $C(2, 5)$.

а) Најди ја сликата на триаголникот ABC при осна симетрија во однос на x – оската и означи ја со MNP.

б) Изврши транслација на триаголникот MNP за 4 единици налево и 5 единици нагоре.

в) Изврши ги трансформациите по обратен редослед: прво транслација на триаголникот ABC за 4 единици налево и 5 единици нагоре, а потоа осна симетрија на добиениот триаголник во однос на x-оската. Дали ја доби истата слика? Што заклучуваш?

3. Во правоаголен координатен систем нацртај четириаголник $ABCD$ со координати на темињата $A(1, -3)$, $B(3, -2)$, $C(4, 0)$ и $D(3,1)$.

а) Одреди ја сликата на четириаголникот $ABCD$ при осна симетрија во однос на правата $y = 1$ и означи ја со $MNPR$.

б) Изврши ротација на четириаголникот $MNPR$ со центар во точката $(0, -1)$ за агол од $90°$ во насока на стрелките на часовникот.

в) Изврши ги трансформациите по обратен редослед: прво дадената ротација на $ABCD$, а потоа осна симетрија на добиениот четириаголник во однос на правата $y = 1$. Дали ја доби истата слика? Што заклучуваш?

4. Во една спортска сала се поставуваат нови LED рефлектори. Техничарот прво ги обележал местата предвидени за три рефлектори на планот на салата со точки $A(1, 2)$, $B(4, 2)$ и $C(4, 5)$. Потоа шефот му кажува дека планот треба да се адаптира за другиот ѕид од салата. За да се преместат рефлекторите на новата позиција треба да се извршат две движења: осна симетрија во однос на x-оската и транслација за 3 единици налево и 1 единица надолу.

а) Најди ги координатите на точките A, B, и C после секоја од двете трансформации.

б) Провери дали ќе добиеш ист резултат ако прво ја извршиш транслацијата, а потоа симетријата?

5. Даден е триаголник со темиња во точките $A(1, -1)$, $B(-1, -2)$, $C(1, -2)$. Дадени се две транслации: T_1 со која се оди 3 единици во десно и 4 единици нагоре, и T_2 со која се оди 1 единица во десно и 3 единици надолу. Дали редоследот на извршување на трансформациите е битен?

Истражување

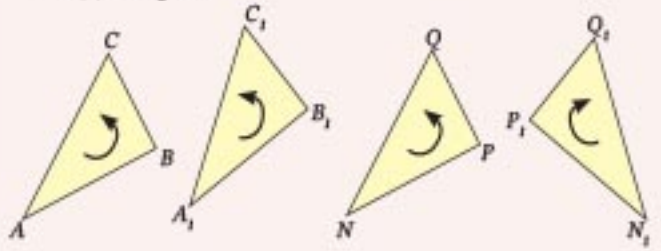
Нацртај две отсечки AB и CD, кои имаат иста должина и не се паралелни. Притоа A и C, како и B и D, се различни точки. Откриј ротација (агол и центар) со која точките C и D се слики на точките A и B, соодветно.

Упатство: Центарот на ротација е еднакво оддалечен од точките A и C, па затоа ќе лежи на симетралата на отсечката AC. Од иста причина, центарот на ротација ќе лежи и на симетралата на отсечката BD.

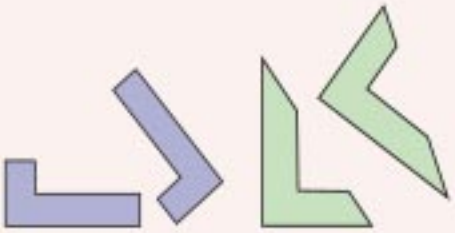
18. ИДЕНТИФИКУВАЊЕ КОМБИНАЦИИ ОД ОСНА СИМЕТРИЈА, РОТАЦИЈА И ТРАНСЛАЦИЈА

Активност

а) За триаголниците на цртеж 1 важи $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta NPQ \cong \Delta N_1P_1Q_1$. Кој пар триаголници се исто насочени, а кои спротивно насочени? Како заклучи? Образложи го одговорот.



црт. 1



црт. 2

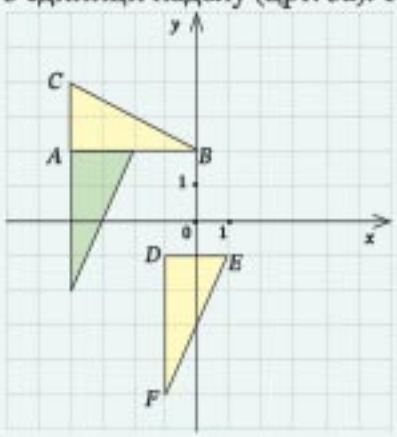
б) 2Д формите на цртеж 2 се по парови складни. Кој пар од 2Д-форми се исто насочени, а кои спротивно насочени? Како заклучи? Образложи го одговорот.

Во оваа лекција ќе обидеме да идентификуваме комбинации на осна симетрија, ротација и транслација што се користени за промена на положбата на дадена 2Д-форма.

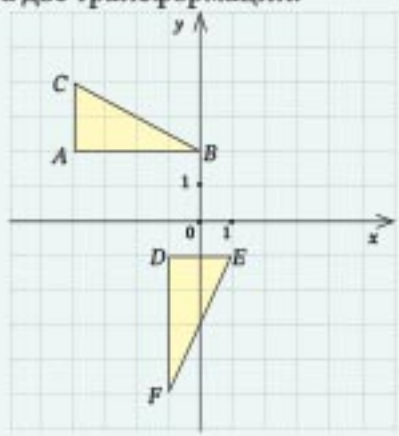
Пример 1

Марија и Мартин бараат комбинација од транслации, ротации и осни симетрии со кои од оригиналот – триаголникот ABC со темиња $A(-4, 2)$, $B(0, 2)$ и $C(-4, 4)$, е добиена сликата – триаголникот DEF со темиња $D(-1, -1)$, $E(1, -1)$ и $F(-1, -5)$.

Двајцата забележале дека двата триаголници се исто насочени. Тоа значи дека во комбинацијата не треба да има осна симетрија.
Марија применила ротација со центар во точката $(-4, 2)$ и агол од 90^o во насока на движење на стрелката на часовникот, а потоа применила транслација за 3 единици десно и 3 единици надолу (црт. 3а). Таа применила две трансформации.



црт. 3а

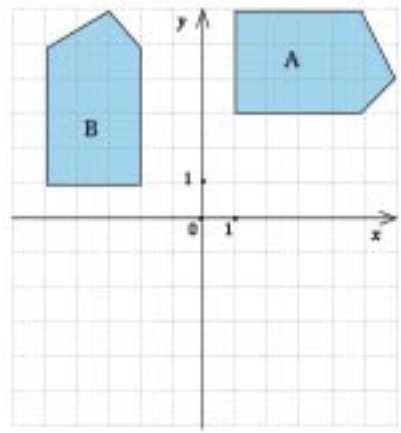


црт. 3б

Мартин забележал дека, ако примени ротација со центар во точката $(-4, -1)$ и агол од 90° во насока на движење на стрелката на часовникот, веднаш ќе го добие триаголникот DEF како слика (црт. 3б). Тој применил една трансформација. Значи, Марија применила две трансформации, а Мартин една трансформација. Неговиот начин е поедноставен.

Задача 1

Најди комбинација од трансформации со кои од оригиналот A, е добиена сликата B (црт. 4).

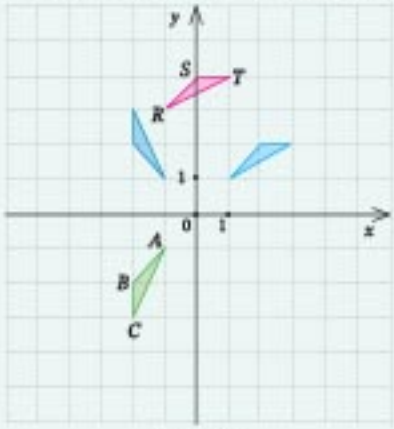


црт. 4

Пример 2

Наставникот им дал задача на Павел, Стефанија и Петар да најдат комбинација од транслации, ротации и осни симетрии со кои од оригиналот – триаголникот ABC со темиња $A(-1, -1)$, $B(-2, -2)$ и $C(-2, -3)$, е добиена сликата – триаголникот RST со темиња $R(-1,3)$, $S(0,4)$ и $T(1,4)$.

Павел, Стефанија и Петар ги дале следните решенија. Тројцата забележале дека двата триаголници се спротивно насочени. Тоа значи дека во комбинацијата е неопходно да има осна симетрија. Павел најпрво применил осна симетрија во однос на x-оската (црт. 5а), потоа применил ротација со центар во координатниот почеток за агол од 90° во насока на движење на стрелката на часовникот, и на крај применил транслација за 2 единици лево и 2 единици нагоре. Тој применил три трансформации.



црт. 5а



црт. 5б



црт. 5в

Стефанија најпрво применила осна симетрија во однос на правата $y = 1$ (црт. 5б).

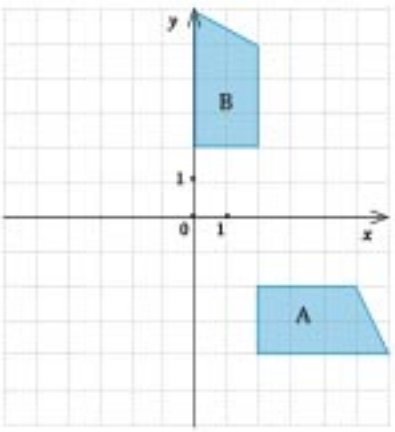
Потоа забележала дека ако примени ротација со центар во точката R и агол 90° во насока на движење на стрелката на часовникот, веднаш ќе го добие триаголникот RST како слика. Таа применила две трансформации.
Петар најпрво применил осна симетрија во однос на правата $y = x$ (црт. 5в). Потоа забележал дека ако примени ротација со центар во точката $(-1, 1)$ и агол 180^0 веднаш ќе го добие триаголникот RST како слика. Тој применил две трансформации.
Значи, Павел применил три трансформации, а Стефанија и Петар по две трансформации. Комбинацијата што ја идентификувале Стефанија и Петар е поедноставна од комбинацијата на Павел.

Задача 2

Реши ја задачата од претходниот пример, разгледувајќи твоја четврта варијанта. Спореди го твојот број на трансформации со бројот на трансформации на Павел, Стефанија и Петар.

Задача 3

Најди комбинација од трансформации со кои од оригиналот – четириаголникот A, е добиена сликата – четириаголникот B (црт. 6).



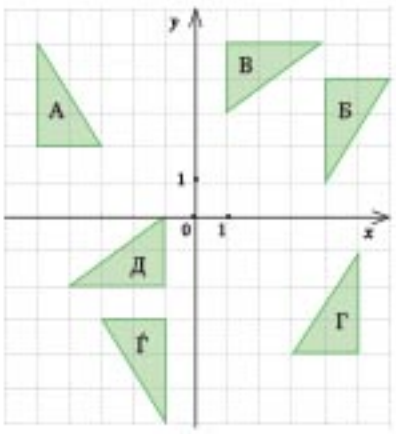
црт. 6

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Најди комбинации од можни транслации, ротации и осни симетрии, така што оригиналот да има координати $A(3,2)$, $B(4,2)$, $C(5,1)$, а сликата да има координати $M(3,4)$, $N(3,5)$, $P(4,6)$.

2. Дадени се два квадрати $ABCD$ и $MNPQ$ со темиња во точките $A(3,2)$, $B(3,3)$, $C(4,3)$, $D(4,2)$ и $M(5,0)$, $N(4,0)$, $P(4,1)$, $Q(5,1)$. Најди комбинација од најмногу три трансформации (транслации, ротации и осни симетрии) за кои $ABCD$ е оригинал, а $MNPQ$ е негова слика.

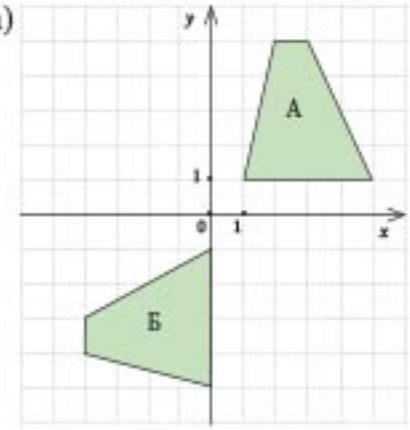
3. Најди комбинација од можни транслации, ротации и осни симетрии со која се трансформира фигурата:
а) А во Б, б) Г во А, в) Ѓ во В,
г) Д во Г, д) Б во Ѓ (црт. 7).



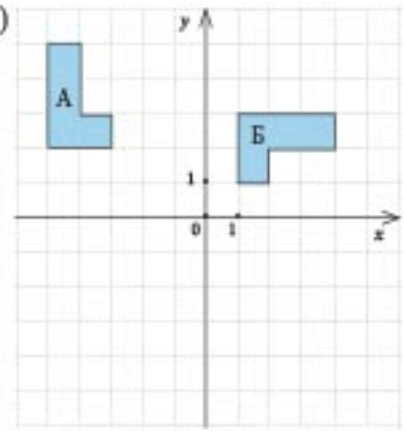
црт. 7

4. Најди комбинација од можни транслации, ротации и осни симетрии со која фигурата А се трансформира во фигура Б (црт. 8):

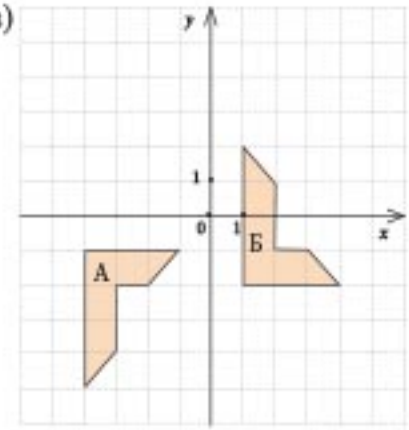
а)



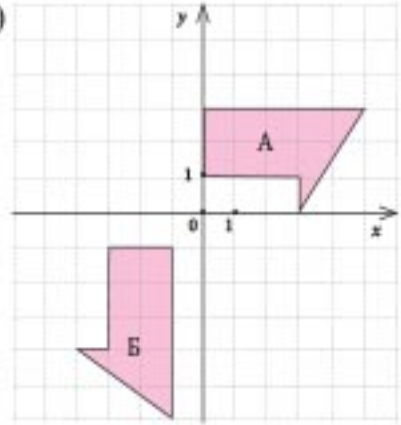
б)



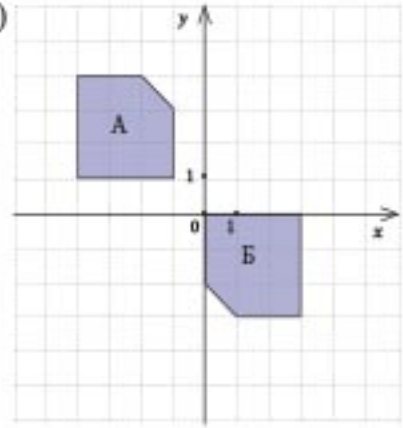
в)



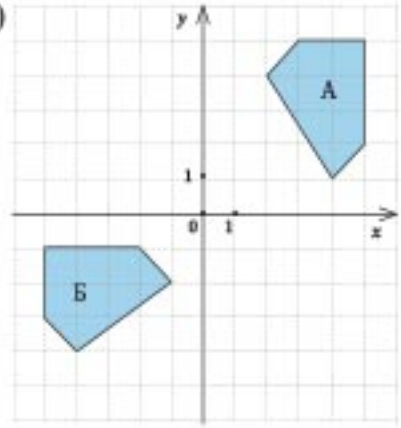
г)



д)



ѓ)



црт. 8

Истражување

Иван сака да провери дали произволно движење, определено со оригиналот ABC и неговата слика $A_1B_1C_1$, може да се претстави како комбинација од најмногу три осни симетрии. Тој размислува на следниот начин: Со првата осна симетрија точката A ќе се совпадне со точката A_1. Потоа со следната осна симетрија (ако има потреба) втората точка (B) да се совпадне со B_1, а притоа точката A_1 да остане во место. На крај, ако има потреба од трета осна симетрија, третата точка (C) да се совпадне со C_1, а точките A_1 и B_1 да си останат во место. Избери два складни триаголници и провери дали Иван е во право.

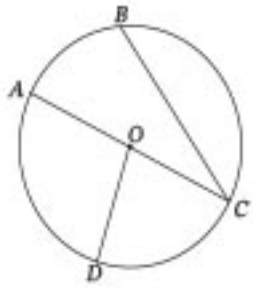
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Еден од двата агли со паралелни краци има 67°. Колку степени има другиот агол, ако:
а) краците им се со исти насоки, б) краците им се со спротивни насоки,
в) еден пар краци им се со исти насоки, а другиот пар со спротивни насоки?

2. Најди ги аглите α и β со заемно нормални краци, ако:
а) $\alpha = 118° + \beta$, б) $\alpha = 5\beta$.

3. Според цртеж 1, именувај ги сите:
а) кружни исечоци, б) кружни отсечоци.

4. Најди го периферниот агол кој е над ист кружен лак со централен агол од: а) 79°, б) 234°.



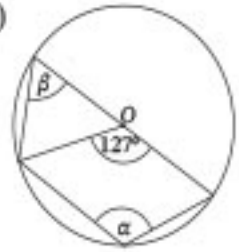
црт. 1

5. Најди ги непознатите агли α и β на цртеж 2:

а)



б)



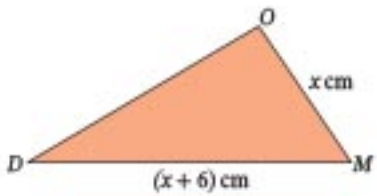
црт. 2

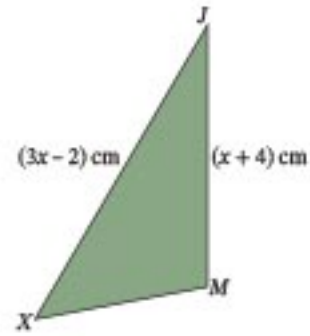
6. Конструирај правоаголен триаголник ABC, ако е дадена хипотенузата $c = 4{,}8$ cm и аголот $\alpha = 30°$.

7. Конструирај рамнокрак триаголник ABC, ако е дадена должината на кракот $b = 5{,}4$ cm и аголот при основата $\alpha = 65°$.

8. Конструирај рамностран триаголник ABC, ако растојанието од тежиштето до една страна на триаголникот е 1,5 cm.

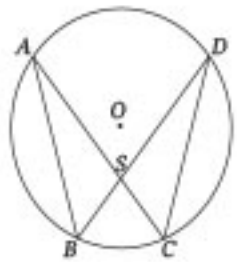
9. Познато е дека $\Delta DMO \cong \Delta JXM$. Според податоците на цртеж 3, најди ја должината на секоја од страните на триаголниците.





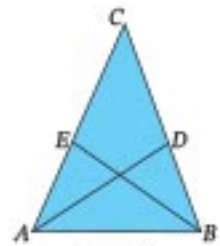
црт. 3

10. Ако е дадено дека $\overline{AB} = \overline{CD}$, објасни зошто $\Delta ABS \cong \Delta DCS$ (црт. 4).



црт. 4

11. Отсечките AD и BE лежат на симетралите на аглите при основата на рамнокракиот триаголник ABC (црт. 5). Објасни зошто: а) $\Delta ABD \cong \Delta BAE$, б) $\overline{DC} = \overline{EC}$.

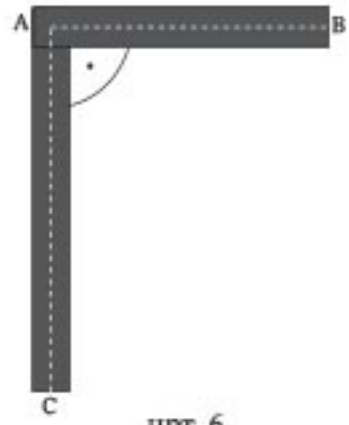


црт. 5

12. Пресметај ја хипотенузата на правоаголен триаголник, ако неговите катети се:
а) $a = 9$ cm и $b = 12$ cm, б) $a = 7$ cm и $b = 24$ cm.

13. Пресметај ја едната катета на правоаголен триаголник, ако хипотенузата и втората катета имаат должини: а) $c = 25$ cm и $b = 15$ cm, б) $c = 37$ cm и $a = 35$ cm.

14. Три раскрсници A, B и C се поврзани така што од A до B води прав пат со должина 230 m. Од A до C води прав пат со должина 325 m и аголот BAC е прав (црт. 6). За колку метри ќе се скрати патувањето од B до C, ако се изгради директен пат помеѓу овие две раскрсници?



црт. 6

15. Во областа на еден прав агол лежи точка M, која од неговите краци е оддалечена 2,4 cm и 0,7 cm. Пресметај колку е оддалечена точката M до темето на правиот агол.

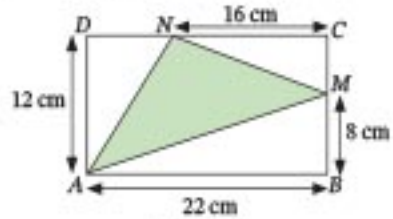
16. Градот Б се наоѓа 56 km источно од градот А. Градот В се наоѓа 73 km јужно од градот А. Да се најде растојанието помеѓу градовите Б и В.

17. Основите на рамнокрак трапез се $a = 85$ cm и $b = 43$ cm, а неговиот крак има должина 35 cm. Пресметај ја висината на трапезот.

18. Пресметај ја дијагоналата d_2 на ромбот, ако страната и едната дијагонала се:
а) $a = 55$ cm и $d_1 = 66$ cm, б) $a = 45$ cm и $d_1 = 72$ cm.

19. Определи го радиусот на опишаната кружница околу квадрат со страна $a = 3$ cm.

20. Пресметај го периметарот на триаголникот AMN, што е впишан во правоаголникот $ABCD$ (црт. 7).



црт. 7

21. Конструирај правоаголник со дијагонала $d = 6$ cm и агол меѓу дијагоналите 140°.

22. Конструирај паралелограм со дијагонала $d_1 = 7$ cm, страна $a = 5$ cm и агол меѓу нив од 30°.

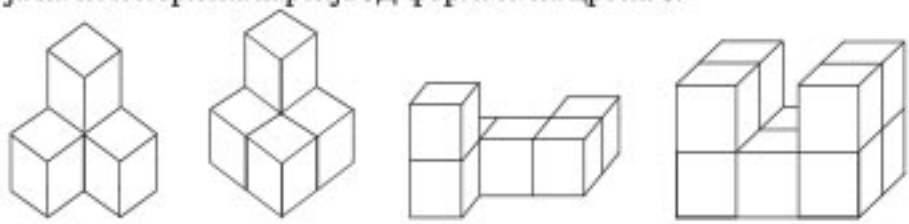
23. Најди го кракот на рамнокрак трапез, ако неговите основи се 38 cm и 24 cm, а висината со кракот зафаќа агол од 45°.

24. Средната линија на трапезот е 10,5 cm, а едната основа е 7,2 cm. Пресметај ја другата основа.

25. Еден од внатрешните агли на делтоидот е 47°, а збирот на еднаквите агли е 236°. Пресметај ги аглите на делтоидот.

26. Колку основни, а колку бочни рабови има:
а) деветнаесетаголна призма, б) седумнаесетаголна пирамида?

27. Нацртај ја на изометриска хартија 3Д-формата на цртеж 8.



црт. 8

28. Даден е триаголник ABC со темињата $A(0, 3)$, $B(4, 0)$ и $C(3, 4)$.

а) Најди ја сликата на триаголникот ABC при осна симетрија во однос на x- оската и означи ја со MNP.

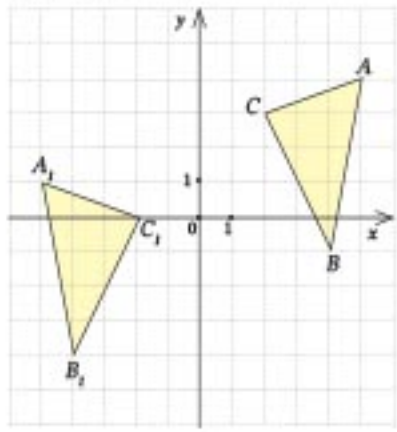
б) Изврши транслација на триаголникот MNP за 5 единици налево и 3 единици нагоре.

в) Изврши ги трансформациите по обратен редослед. Дали ја доби истата слика? Што заклучуваш?

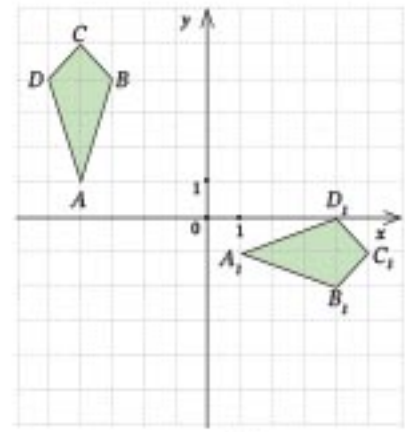
29. Опиши ја трансформацијата со која од:

а) оригиналот – триаголник ABC се добива сликата – триаголник $A_1B_1C_1$ (црт. 9а),

б) оригиналот – четириаголникот $ABCD$ се добива сликата – четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ (црт. 9б).



црт. 9а



црт. 9б



Тема 3:

АЛГЕБРА

Резултати од учење:

При изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш да:

- решаваш проблеми со цели рационални изрази.
- ги користиш поимите релација и функција во секојдневен контекст.
- решаваш проблеми со толкување график на линеарна функција.

1. МОНОМ

Моном. Моном во нормален вид

Активност

а) Што е константа, а што е променлива? Што е израз?
б) Најди ги константите и променливите во следните изрази: $3x^2, xy^3, -4a^3b^2, y$.

Израз формиран од константи и променливи поврзани со знаците за операциите множење и степенување со ненегативен цел број се вика **моном**.

Ќе сметаме дека константите се рационални броеви и променливите примаат вредности во множеството рационални броеви.

Пример 1

а) Сите константи се мономи.
б) Изразите, на пример, $-x, y, \frac{4}{7}a^2b, 3x^2, xy^3, -4a^3b^2$ се мономи.
в) Изразите, на пример, $x^2+1, \frac{2}{y}, \frac{3x-2}{5}$ не се мономи, бидејќи содржат барем по една од операциите собирање, одземање и делење со променлива.
г) Изразот $\frac{y^2}{15}$ е моном, бидејќи може да го запишеме како производ $\frac{1}{15}y^2$.

Задача 1

Кои од следните изрази се мономи:

а) $\frac{5}{6}$, б) $8x$, в) $3x+2$, г) $\frac{x}{5}$, д) $\frac{5}{x}$, ѓ) $\frac{2x+1}{3}$, е) $-7xy^3z^5$, ж) $\frac{2x^4y^2z}{5}$?

Пример 2

Мономот $5x^3y2zy$ има три променливи x, y и z. Со примена на комутативниот закон за множење и постапката за множење на степени со исти основи, производот yy можеме да го запишеме во облик y^2. Слично, производот $5 \cdot 2 = 10$. Тогаш, мономот $5x^3y2zy$ е еднаков на мономот $10x^3y^2z$. Мономот $10x^3y^2z$ не можеме со понатамошна постапка да го запишеме со помал број на множители.
За него велиме дека мономот е запишан во **нормален вид**. Значи:

$5x^3y2zy = 10x^3y^2z$.

При сведување на моном во **нормален вид**:
- ги разместуваме множителите со примена на комутативниот закон;
- константите ги множиме, а множителите кои означуваат иста променлива ги запишуваме во вид на степен со помош на правилото за множење на степени со иста основа;
- добиениот моном е еднаков на даденият моном.

Се договараме, кај мономите во нормален вид, прво да го запишуваме множителот кој е константа, а потоа множителите кои се променливи.

Пример 3

Сведи го мономот во нормален вид: а) $5x^5yxy^2$, б) $2x^3yx^4y(-4xy)$, в) $-xyx^3y^3xy$.

а) $5x^5yxy^2 = 5x^6y^3$, б) $2x^3yx^4y(-4xy) = -8x^8y^3$, в) $-xyx^3y^3xy = -x^5y^5$.

Задача 2

Сведи го мономот во нормален вид:
а) $8ab^2 3ab$, б) x^2yxxy^2, в) $-x^2y^3\,4x^3y^3\,(-6xy)$, г) $2aab3abb4ab^2$.

Константата во мономот во нормален вид со која се множат променливите се вика **коефициент на мономот**. Производот од променливите во мономот се вика **главна вредност на мономот**.

Пример 4

Најди ги коефициентот и главната вредност на мономот:
а) $6ab^3c^2$, б) $-xy^3$, в) xy^2z^3, г) $-\frac{3x^2y}{4}$.

а) Мономот $6ab^3c^2$ има коефициент 6 и главна вредност ab^3c^2.
б) Бидејќи $-xy^3 = (-1)\cdot xy^3$, коефициентот на мономот е -1, додека главната вредност е xy^3.
в) Бидејќи $xy^2z^3 = 1\cdot xy^2z^3$, коефициентот на мономот е 1, додека главната вредност е xy^2z^3.
г) Кај мономот $-\frac{3x^2y}{4}$, коефициентот е $-\frac{3}{4}$, а главната вредност е x^2y.

Задача 3

Прецртај ја и пополни ја табелата:

моном	$2{,}5\,a^5b^2$	y^3	$-xyz$	$\frac{x^3y^5}{3}$	$-12x^2$	y^3
коефициент						
главна вредност						

Степен на моном

Активност

Колку е степеновиот показател на променливата во мономот: а) $5a$, б) $\frac{1}{3}x^2$?

Кај мономите со една променлива, степеновиот показател на променливата е степен на мономот. На пример, мономот $-2x^3$ е од трет степен, а мономот $7a^4$ е од четврти степен, итн.

Кај мономите со две или повеќе променливи, освен степен на мономот по однос на секоја променлива одделно, разликуваме и **степен на мономот по однос на сите променливи.**

Во таа смисла, во мономот $-3xy^2$ променливата x е на прв степен, променливата y е на втор степен, па степенот на мономот во однос на сите променливи е $1 + 2 = 3$.

Збирот од степеновите показатели на променливите во мономот се вика **степен на мономот.**

Пример 5

Најди го степенот на мономот: а) $2a^2b^3c^4$, б) $5xy^2z$, в) $-xyz$.

а) Збирот на показателите на променливите е $2 + 3 + 4 = 9$, па мономот има степен 9.
б) Степенот на мономот $5xy^2z$ е $1 + 2 + 1 = 4$.
в) Секоја од променливите x, y и z е на прв степен, па мономот $-xyz$ е од трет степен.

Задача 4

Најди го степенот на мономот:
а) $2xy^3z^2$, б) $5x4y$, в) x^3z^5, г) $3x^3z^3$.

Слични мономи

Активност

Кои од мономите: $-3xy^2$, $3x^2$, $5xy^2$, $-3x$ и $5x^3y^2$ имаат иста главна вредност?

Пример 6

Сведи ги во нормален вид мономите $3(-2)x^4yy^2$ и $(5^2 - 2^2)xyx^3y^2$.
Дали тие имаат иста главна вредност?

Да ги сведеме мономите во нормален вид: $3(-2)x^4yy^2 = -6x^4y^3$ и $(5^2 - 2^2)xyx^3y^2 = 21x^4y^3$.
Мономите $-6x^4y^3$ и $21x^4y^3$ имаат иста главна вредност. Тие се разликуваат само по коефициентот. За нив велиме дека се слични мономи.

Мономите кои имаат иста главна вредност се викаат **слични мономи.**

Задача 5

Кои од следните парови мономи се слични:
а) $-2x$ и $2x^2$, б) $4xy$ и $-3xy$, г) -5 и 5, д) $7a^4b^3aba$ и ab^3a^5?

Спротивни мономи

Активност

Дадени се мономите $-2x^2$ и $2x^2$.
а) Дали тие се слични? б) Какви броеви се нивните коефициенти?

Пример 7

Мономите $-6x^5y$ и $6x^5y$ имаат иста главна вредност. Тие се слични мономи. Нивните коефициенти -6 и 6 се спротивни броеви. За мономите велиме дека се спротивни еден на друг.

Два слични мономи со спротивни коефициенти се викаат **спротивни мономи**.

Пример 8

Најди ги спротивните мономи на мономите:
а) $-4xy^3$, б) $-6a^4b^6$, в) $7{,}5x^2y^3$, г) $-\frac{2}{3}x^9y^7z$.

а) Спротивен моном на мономот $-4xy^3$ е мономот $4xy^3$, б) $6a^4b^6$, в) $-7{,}5x^2y^3$, г) $\frac{2}{3}x^9y^7z$.

Задача 6

Најди ги спротивните мономи на мономите: а) $-4xy^3$, б) xy, в) -6, г) $7{,}5x^2y^3$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Кои од следните изрази се мономи:
а) 10, б) $2x$, в) $5x+1$, г) $\frac{x^2}{2}$, д) $\frac{1}{x^3}$, ѓ) $\frac{x-1}{4}$, е) $-3xy^3z^4xy^2$, ж) $\frac{x^4y^2z}{7x^2y}$?

2. Сведи го мономот во нормален вид:
а) x^5y^3xy, б) $3ab(-2a^3b)$, в) $-5xy^2x^2y^3(-6xy)$, г) $ab2abb4a^2$.

3. Препиши ја и пополни ја табелата:

моном	$3ab$	$-5x^3y^3$	$x^5y^2z^4$	$\frac{x^3y^4}{9}$	$\frac{-x}{8}$	$-xy^5$
коефициент						
главна вредност						
степен на мономот						

4. Кои од следните парови мономи се слични:
а) $3x$ и $3x^2$, б) $5x^3y$ и $-3x^2y$, в) 1 и 5, г) a^3b и ab^3?

5. Запиши по два монома слични со мономот: а) $4x^4$, б) $5xy$, в) 7, г) a^2b^3.

6. Најди го спротивниот моном на мономот: а) $-x^3$, б) $6x^2y^4$, в) $-3{,}7$, г) $15y^3$.

7. Најди го степенот на мономот: а) a^3b, б) $4x^2y^3z$.

8. Запиши: а) три слични мономи со степен 7, б) два спротивни мономи со степен 5.

9. а) Запиши израз за бројот на фломастери набавени за 4 книжарници, ако за секоја се набавени x кутии со x пакувања, а во секое пакување има по y фломастери.
б) Сведи го добиениот израз во нормален вид.

10. Пчеларот има 3 пчеларници со по x сандаци со пчели. Во секој сандак има y рамки, а на секоја рамка по y^3 пчели.
а) Запиши израз за вкупниот број на пчели кои ги има пчеларот.
б) Сведи го добиениот израз во нормален вид.
в) Определи ги коефициентот и главната вредност на мономот.

Истражување

1. Дефинираме константи и променливи во случај кога имаме броен израз. Обиди се да одговориш на прашањето: Што ќе бидат константи, а што променливи во геометријата?
НАЦРТАЈ еден триаголник ABC, една права a и една точка M. Формите што ги нацрта се константи. На пример, точката M е константа, бидејќи таа е точно определена во рамнината. НАПИШИ: триаголник XYZ, права c, точка S. Дали овие форми, без да се зададени во рамнината, се променливи? Зошто?

2. а) Со кој израз пресметуваме периметар на рамностран триаголник? Дали изразот е моном? Кој е коефициентот, а која е главната вредност на мономот?
б) Наведи примери на мономи кои ги користиме во мерење и геометрија што имаат повисок степен од дадениот во примерот. Што пресметуваме со нив?

2. СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ МОНОМИ

Собирање мономи

Активност

Учениците прават експеримент со раст на растенија. Растот на едно растение во првата недела се опишува со изразот $3x$, а во втората недела со изразот $5x$.
Запиши го изразот кој покажува колку пораснало растението за двете недели.

Да се потсетиме дека слични мономи во алгебарски збир се сведуваат на тој начин што се собираат нивните коефициенти, а променливите остануваат исти. Така, на пример, имаме дека

$$7x + 5x = (7 + 5)x = 12x.$$

Збир на два слични мономи е моном чиј коефициент е еднаков на збирот од коефициентите на собироците, а главната вредност е еднаква на главната вредност на собироците.

Пример 1

Најди го збирот на сличните мономи: а) $5y^3$ и y^3, б) $2x^4y$ и $-2x^4y$,

а) $5y^3 + y^3 = (5 + 1)y^3 = 6y^3$ б) $2x^4y + (-2x^4y) = (2 + (-2))x^4y = 0 \cdot x^4y = 0$

Забележи дека збирот на два спротивни мономи е нула.
За собирањето на слични мономи важат комутативниот и асоцијативниот закон. Затоа можеме да собираме мономи по произволен редослед и да ги групираме мономите на произволен начин.
Тоа, исто така, значи дека можеме да зборуваме за збир на неколку слични мономи.

Пример 2

Пресметај го збирот на сличните мономи: а) $3x^3yz^4$, x^3yz^4 и $7x^3yz^4$, б) $\frac{1}{2}ab$, $2\frac{1}{2}ab$ и $7ab$.

а) $3x^3yz^4 + x^3yz^4 + 7x^3yz^4 = (3 + 1 + 7)x^3yz^4 = 11x^3yz^4$,

б) $\frac{1}{2}ab + 2\frac{1}{2}ab + 7ab = \left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 7\right)ab = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{14}{2}\right)ab = 10ab$.

Задача 1

Најди го збирот на сличните мономи: а) $2x^3$ и $3x^3$, б) $3x^2y$ и $-5x^2y$, в) $-xy^3z^4$, $7xy^3z^4$, и $0{,}5\,xy^3z^4$.

Пример 3

Цената на еден молив е x^2 денари, а цената на гумата е двојно поголема. Марина купила 5 моливи и една гума.
а) Запиши израз со кој ќе ја претставиш вкупната цена на гумата и моливите.
б) Сведи го добиениот израз.

а) Цената на 5 моливи е $5x^2$, а на гумата е $2x^2$, па изразот за вкупната цена е $5x^2 + 2x^2$.
б) Добиениот израз е збир на два слични мономи, па имаме $5x^2 + 2x^2 = (5 + 2)x^2 = 7x^2$.

Пример 4

Најди го збирот на мономите $5x^2$ и $3y$.

Мономите $5x^2$ и $3y$ не се слични, па нивниот збир ќе го запишеме како алгебарски збир $5x^2 + 3y$.

Пример 5

Најди го збирот на мономите:

а) $5a^2b$, $-3ab^2$, $-a^2b^2$, $4ab$, $6a$ и $2b$, б) $3a^2$, $5a^2b$, $-a^2b$, b, $-3b$ и 4.

а) Збирот на дадените мономи го запишуваме како алгебарскиот збир

$5a^2b + (-3ab^2) + (-a^2b^2) + 4ab + 6a + 2b =$

$= 5a^2b - 3ab^2 - a^2b^2 + 4ab + 6a + 2b.$

б) $3a^2 + 5a^2b + (-a^2b) + b + (-3b) + 4 =$ Бараниот збир го запишуваме како алгебарски збир.

$= 3a^2 + \underline{5a^2b} - \underline{a^2b} + \underline{\underline{b}} - \underline{\underline{3b}} + 4 =$ Ги собираме сличните мономи.

$= 3a^2 + 4a^2b - 2b + 4$

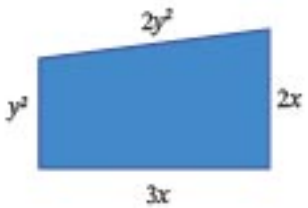
Задача 2

Најди го збирот на мономите:

а) a^2 и $-3a$, б) $2a^2b$, ab^2, b, $-a^2b$ и $-6ab^2$, в) $4x^3y^2$, $5x^3y$, xy, $-5x^2y$ и $4x^3y^2$.

Задача 3

Најди го периметарот на трапезот на цртеж 2.



црт. 2

Одземање мономи

Активност

Висината на Ана е дадена со изразот $3x$, а на нејзиниот татко со изразот $5x$. Запиши израз кој покажува за колку таткото е повисок од Ана.

Пример 6

Најди ја разликата на мономот $5a^2$ со мономот a^2.

Да забележиме дека дадените мономи се слични. Со примена на дистрибутивниот закон добиваме

$5a^2 - a^2 = (5 - 1)\,a^2 = 4a^2.$

Разлика на моном со нему сличен моном е моном чиј коефициент е еднаков на разликата на коефициентот на намаленикот со коефициентот на намалителот, а главната вредност е еднаква на главната вредност на намаленикот (намалителот).

Според тоа, разликата на два слични мономи е моном сличен на нив.

Пример 7

Најди ја разликата: а) $-6x^3 - 2x^3$, б) $2x^2y - (-5x^2y)$.

а) $-6x^3 - 2x^3 = (-6 - 2)x^3 = -8x^3$, б) $2x^2y - (-5x^2y) = (2-(-5))x^2y = 7x^2y$.

Задача 4

Најди ја разликата на: а) мономот $-5x^2$ со мономот $-5x^2$, б) мономот $2xy$ со мономот $-2xy$.

Пример 8

Најди ја разликата на мономот $2x^3y$ со мономот $5x^2$.

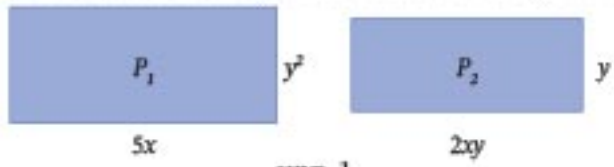
Дадените мономи не се слични. Бараната разлика е алгебарскиот збир $2x^3y + (-5x^2) = 2x^3y - 5x^2$.

Задача 5

Најди ја разликата на: а) мономот $-4a^2b$ со мономот $5ab$, б) мономот $2x^2y$ со мономот $-2x^2y$.

Пример 9

Најди ја разликата на плоштините на правоаголниците на цртеж 1:



црт. 1

Плоштините на дадените правоаголници се $P_1 = 5xy^2$ и $P_2 = 2xyy = 2xy^2$. Нивната разликата ќе биде
$P_1 - P_2 = 5xy^2 - 2xy^2 = (5 - 2)xy^2 = 3xy^2$.

Пример 10

Во училиштето се организира акција за садење дрвја. Учениците од осмо одделение садат дрвца по различни редови. Ана засадила $3x$ дрвца во првиот ред, а во вториот ред уште $5x$ дрвца. Бојан засадил $9x$ дрвца во третиот ред, но заради малиот простор морал да извади $2x$ дрвца.

а) Колку дрвца вкупно засадила Ана?

б) Колку дрвца му останале на Бојан по вадењето на дрвцата?

в) Кој засадил повеќе дрвца на крајот, и за колку?

а) Ана засадила $3x + 5x = 8x$ дрвца.

б) Бојан засадил $9x$ дрвца, но извадил $2x$, па затоа Бојан засадил $9x - 2x = 7x$ дрвца.

в) Разликата во засадените дрвца меѓу нив е $8x - 7x = x$. Ана засадила x дрвца повеќе од Бојан.

Задача 6

Првиот ден Јана засадила $2x^2$ лалиња, вториот засадила за 5 лалиња повеќе, а третиот за x^2 повеќе од вториот ден.

а) Запиши израз со кој ќе го претставиш вкупниот број лалиња што ги засадила Јана.

б) Упрости го добиениот израз под а).

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Најди го збирот на мономите:
   а) y^2 и $3y^2$, б) $-x^2y$ и $4x^2y$, в) $-5x^3$ и $-5z^3$, г) $3abc$ и $4a^2b^2c^2$.
2. Одреди го збирот на мономите:
   а) $6xy^2$, xy^2 и $3xy^2$, б) $5xy$, $-xy$, $-2xy$ и $4xy$, в) $-3x^2$, $-2x^2$, x^2 и $-x^2$, г) b^3, $2b^3$, $3b^3$ и $4b^3$.
3. Од мономот $-2x^3$ одземи го мономот: а) $5x^3$, б) x^3, в) $-2x^3$, г) $-3x^3$.
4. Од мономот $5x^2y^3$ одземи го мономот: а) $3x^2y^3$, б) $7x^2y^3$, в) $-4x^2y^3$, г) $-x^2y^3$.
5. Од збирот на мономите $-4a^2b$ и $-3a^2b$ одземи го мономот $-5a^2b$.
6. Од збирот на мономите $-3xy^2$ и $2xy^2$ одземи ја нивната разлика.
7. Упрости го изразот:
   а) $8a^2 + 3a^2 + 4a^2 + 3$, б) $2x^2 - y^3 - 4x^2 + 3y^3 - 1$,
   в) $a - 4b^2 + 2a - b^2 + 1$, г) $4x^2 + 2y^2 - 3x^2 + y^2 - x^2 - 2$.
8. Упрости го изразот:
   а) $\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^2-\frac{2}{3}x^2$, б) $\frac{3}{5}a+\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b$, в) $\frac{2}{3}x+5-\frac{5}{6}x+\frac{4}{3}$.
9. Првиот ден Олег истрчал $2x^3$ метри, вториот за x^3 метри повеќе, третиот за $2x$ метри повеќе од вториот ден, а четвртиот за $2x$ метри повеќе од првиот ден.
   а) Запиши израз со кој ќе го претставиш вкупниот број метри што ги истрчал Олег четирите дена.
   б) Упрости го добиениот израз под а).

3. ПОЛИНОМ. СТЕПЕН НА ПОЛИНОМ

Полином. Полином во нормален вид

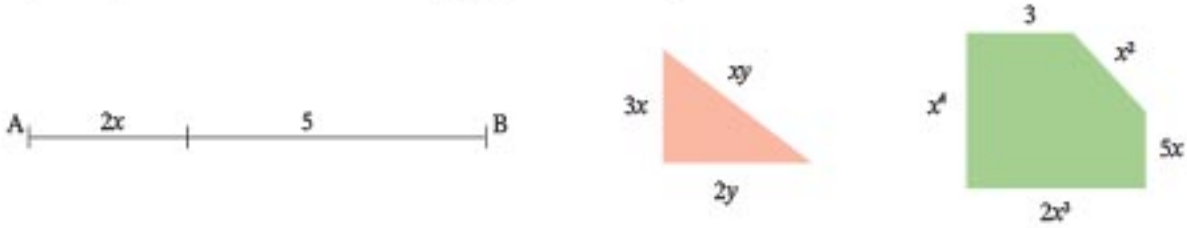
Активност

Од колку мономи е формиран изразот: а) $7a^2b + 4ab^2$, б) $4x^5 - 2x^3y + y^4$?

Пример 1

Според податоците на цртеж 1 запиши израз за:
а) должината на отсечката AB, б) периметарот на триаголникот,
в) периметарот на петаголникот.

Од колку мономи се состои секој од добиените изрази?



црт. 1

а) Должината на отсечката AB ја запишуваме со изразот $2x + 5$.
б) Изразот за периметарот на триаголникот е алгебарскиот збир $3x + 2y + xy$.
в) Периметарот на петаголникот го запишуваме со изразот $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$.
Изразот $2x + 5$ е алгебарски збир од два мономи, изразот $3x + 2y + xy$ од три мономи, а изразот $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$ е алгебарски збир од пет мономи.

- Израз што претставува алгебарски збир од конечно многу мономи се вика **полином**.
- Мономите од кои е составен полиномот се викаат **членови на полиномот**.

Полиноми се, на пример, изразите: $x^2 - xy + 1$, $2a + 3$, $y^3 - 2y^2 + y + 4$ и $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$.
Членови на полиномот $a^7 - 2a^3 + a - 5$ се мономите: a^7, $-2a^3$, a и -5.

Пример 2

Кои од изразите $3x^6 - x + 5$, $\frac{3}{5b}$, $a + 1$, $\frac{x+2}{y}$, 18, $3x^2 + \frac{1}{6}x$, $z^5 - 3$, $\frac{1}{x} + 3$, $8a^2b$ се полиноми?

Полиноми се изразите: $3x^6 - x + 5$, $a + 1$, 18, $3x^2 + \frac{1}{6}x$, $z^5 - 3$ и $8a^2b$.
Изразите $\frac{3}{5b}$, $\frac{x+2}{y}$ и $\frac{1}{x} + 3$, не се полиноми бидејќи содржат делење со променлива.

Активност

Сведи го во нормален вид и најди го коефициентот на мономот:
а) $5x^3y^3xy^2$, б) $-3a^3ab^24aab^2$.

Пример 3

Сведи го во нормален вид полиномот $2x^3 + 3xx^2 - 4$.

Прво треба да провериме дали секој моном во полиномот е во нормален вид.
Мономот $3xx^2$ не е во нормален вид.
Запишуваме $2x^3 + 3xx^2 - 4 = 2x^3 + 3x^3 - 4$.
Добиениот полином содржи слични мономи, кои можеме да ги собереме, па имаме:

$$2x^3 + 3x^3 - 4 = 5x^3 - 4$$

Добивме полином кој понатаму не може да се упростува, значи полиномот сведен во нормален вид е биномот $5x^3 - 4$.

- **Полином е во нормален вид** ако не содржи слични членови и сите негови членови се во нормален вид.
- Коефициентите на мономите од коишто е составен полиномот во нормален вид се викаат **коефициенти на полиномот.**

Полиномот $5x^3 + 6x^2 - 2x + 4$ е во нормален вид. Неговите коефициенти се: 5, 6, – 2 и 4 .

Задача 1

Кои од следните полиноми се во нормален вид:
а) $x^3 - (xy)^2 + 4$, б) $2xx^2 - 3x + x + 5$, в) $5xy + 6x + 1$, г) $3a + 4b + 5$?

Пример 4

Сведи го во нормален вид полиномот:
а) $4xy + 5x - xy + x + 1$, б) $ab - b + 2a + 3b + a + 4$.
в) $3x^3 - 7x + 6x + x^2 + x^3 + x + 3x^2$

а) $4\underline{xy} + 5\underline{\underline{x}} - \underline{xy} + \underline{\underline{x}} + 1$ — Ги подвлекуваме меѓусебно сличните мономи
$= (4 - 1)xy + (5 + 1)x + 1 =$ — Ги собираме сличните мономи.
$= 3xy + 6x + 1$

б) $ab - b + 2a + 3b + a + 4$
$= ab - \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{2a}} + \underline{\underline{\underline{3b}}} + a + 4$
$= ab + 2b + 3a + 4$

в) $3x^3 - 7x + 6x + x^2 + x^3 + x + 3x^2$
$= \underline{\underline{\underline{3x^3}}} - \underline{7x} + \underline{6x} + \underline{\underline{x^2}} + \underline{\underline{\underline{x^3}}} + \underline{x} + \underline{\underline{3x^2}}$
$= 4x^3 + 4x^2$

Задача 2

Сведи го во нормален вид полиномот:
а) $5xy + 6x - 3xy + 1$, б) $2a + 5b - 3 - b + 3a + 6b + 4$, в) $x^3 - (3x)^2 + x - 8$,
г) $3xx^3 - 2x + 7x + x^3y^2 + 1$, д) $xy + 3xy^2 + 6xy - 3xy + 2x^2y^2$.

Активност

Колку членови има полиномот: а) $xy^3 + 2xy$, б) $3b + 4$, в) $x^3 + 2x + 1$?

Полином со два члена се вика двочлен полином или **бином**.

Во согласност со дефиницијата, секој моном е полином. Бидејќи секоја константа е моном, може да заклучиме дека константите се полиноми.
Откако даден полином ќе го доведеме во нормален облик, според бројот на членови, разликуваме кога полиномот е моном, бином или полином со повеќе членови.

Пример 5

Кои од полиномите $5xx^2 - 3x + x$, $\frac{x}{5} - \frac{x}{5}$, $5a^2b^2 + 2a^2b^2$, $2x - 5x + 4x$, $-4x^3+7$ и $7x^2y$ се:
а) мономи, б) биноми?

Полиномите $-4x^3 + 7$ и $7x^2y$ се во нормален вид.
Да ги запишеме и полиномите $5xx^2 - 3x + x$, $\frac{x}{5} - \frac{x}{5}$, $5a^2b^2 + 2a^2b^2$, $2x - 5x + 4x$ во нормален вид:

$5xx^2 - 3x + x = 5x^3 - 3x + x = 5x^3 - 2x$, $\quad \frac{x}{5} - \frac{x}{5} = 0 \cdot x = 0$,

$5a^2b^2 + 2a^2b^2 = 7a^2b^2$, $\quad 2x - 5x + 4x = x$

а) Мономи се полиномите 0, x, $7a^2b^2$ и $7x^2y$.
б) Биноми се полиномите $5x^3 - 2x$ и $-4x^3 + 7$.

Задача 3

Кои од полиномите $-6xy + 5xy$, $2xx + 5$, $x^4 + 2xx^3 + x^2 + 5xx$ и $x^2 + 3x^2$, се:
а) мономи, б) биноми?

Степен на полином

Како кај мономите, така и кај полиномите можеме да дефинираме степен на полином.

Пример 6

Најди го степенот на полиномот: а) $5x^2y + 6xy + 1$, б) $3xy^2 + 2xy^2 - (3xy) + 2xyx^2y^2$.

За да најдеме степен на полином, треба полиномот да биде сведен во нормален вид.
а) Во овој случај полиномот е во нормален вид.
Мономот $5x^2y$ има степен $1 + 2 = 3$. Тој е највисокиот степен меѓу степените на мономите во полиномот, па степенот на полиномот $5x^2y + 6xy + 1$ е 3.
б) Прво ќе го сведеме полиномот во нормален вид:
$3xy^2 + 2xy^2 - 3xy + 2xyx^2y^2 = 3xy^2 + 2xy^2 - 3xy + 2x^3y^3 = 5xy^2 - 3xy + 2x^3y^3$.
Меѓу трите мономи во полиномот, мономот $2x^3y^3$ има највисок степен $3 + 3 = 6$.
Заклучуваме дека степенот на полиномот $5xy^2 - 3xy + 2x^3y^3$ е 6.

Степен на полином во нормален вид се вика највисокиот степен меѓу степените на мономите од кои е составен полиномот.

Задача 4

Најди го степенот на полиномот:

а) $2xy + x + 3$, б) $a + 5b + 4$, в) $x^3 - x^2 + 5x - 8$,

г) $xx^2 - x^3 + 7x + xy$, д) $xy^2 + 6xy - 3xy + 2x^2y$, ѓ) $2x^2y^3 + xy^2z - 3xy^2z + xxyy^2$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Кои од следните изрази $2x^3 - 8$, $3x + 7x + 1$, $4xy^2 - xy + x^2y - xy$, $2y^2 - yy$, $ab - 3a + 4b + 5ab$, $9x + x$, $2(xy)^2 + 3x^2y^2$ се: а) мономи, б) биноми?

2. Со употреба на мономите $\frac{5}{6}a^2$, $\frac{2}{5}a$, $\frac{1}{3}a^2$, $\frac{1}{7}$, $-\frac{4}{9}a^3$ и $-\frac{3}{4}a$ запиши по три:

а) биноми со степен 3, б) полиноми со степен 2, в) полиноми со степен 3.

3. Најди го степенот на полиномот:

а) $x + 5$, б) $ab + 1$, в) $x^3 + x - 1$, г) $xy^3 + x + xy$, д) $x^5y - y^5 + x^2y^2$,

ѓ) $ab - 3a^2b + aab + 4ab$, е) $2x^2 + y^3 + xy^2z - 3$, ж) 23.

4. Запиши полином со степен: а) 7, б) 2, в) 1.

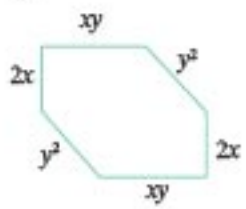
5. Запиши го во нормален вид полиномот:

а) $a + 5b - 7 - a + 2a + 6b + 4$, б) $xy + 5x - 4xy + 2$, в) $2x^3 - 3x^2 + xxx - x^2$,

г) $3x^3 - 2x + 7x^2 + x^3 + 5x + 2x^2 + 1$, д) $xyx + 3xy^2 + 4xxy - 3xyy + 2xy$.

6. Запиши израз за периметарот на формата и сведи го во нормален вид (црт. 2):

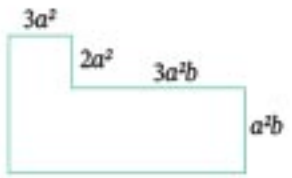
а)



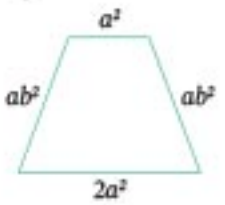
б)



в)



г)

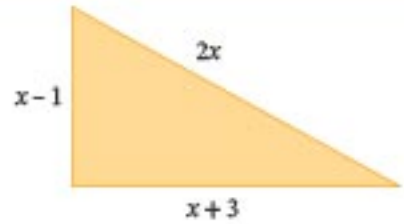


црт. 2

4. СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ ПОЛИНОМИ

Активност

Запиши израз за периметарот на триаголникот на цртеж 1 и упрости го.



црт. 1

Пример 1

Најди го збирот на:

а) мономот $2x^2$ и полиномот $2x^3 + 3x^2 + x + 4$, б) полиномите $3x^2 + x^2y + x + 4$ и $5x^2y + 3xy + 2$.

а) $2x^2 + (2x^3 + 3x^2 + x + 4)$
$= 2x^3 + 2x^3 + 3x^2 + x + 4$
$= 2x^3 + 5x^2 + x + 4$

Се ослободуваме од заградите.
Ги сведуваме сличните мономи.
Ги подредуваме членовите на полиномот според степенот.

б) $(3x^2 + x^2y + x + 4) + (5x^2y + 3xy + 2)$
$= 3x^2 + x^2y + x + 4 + 5x^2y + 3xy + 2$
$= 3x^2 + \underline{x^2y} + x + \underline{\underline{4}} + \underline{5x^2y} + 3xy + \underline{\underline{2}}$
$= 3x^2 + 6x^2y + x + 3xy + 6$

Полиноми (моном со полином) се собираат така што кон едниот полином (моном) се додаваат последователно членовите од другиот полином. Потоа во добиениот полином се сведуваат сличните мономи.

Задача 1

Најди го збирот на полиномите:

а) $4x^2 - 5x + 3$ и $5x^2 - x + 1$,
б) $3x^3 + 5x^2 + 2x + 4$ и $x^3 - 3x^2 + x$,
в) $4x^2 + 5x^2y + y + 2$ и $5x^2y + 3y + 5$,
г) $x^2y + 2x^3y + xy + 4x$ и $5x^2y + 3x - 2xy$.

Задача 2

Една нива дава (x^2+2xy) kg пченица, а друга $(3x^2-xy+4y)$ kg.

а) Состави израз кој ја прикажува вкупната жетва.

б) Сведи го добиениот полином во нормален вид.

Пример 2

Од полиномот $x^3 - 3x^2 + 1$ одземи го мономот $2x^2$.

$(x^3 - 3x^2 + 1) - 2x^2$	Се ослободуваме од заградите.
$= x^3 - 3x^2 + 1 - 2x^2$	Ги сведуваме сличните мономи.
$= x^3 - 5x^2 + 1$	Ги подредуваме членовите на полиномот.

Пример 3

Од полиномот $2x^3 + x^2 + 2x + 1$ одземи го полиномот $x^3 - 3x^2 + 3x$.

$(2x^3 + x^2 + 2x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x)$	Се ослободуваме од заградите. Знакот минус (–) пред заградата ги менува знаците на членовите во полиномот во спротивни. Ги сведуваме сличните мономи. Ги подредуваме членовите на полиномот.
$= 2x^3 + x^2 + 2x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x$	
$= \underline{2x^3} + \underline{x^2} + \underline{2x} + 1 - \underline{x^3} + \underline{3x^2} - \underline{3x}$	
$= x^3 + 4x^2 - x + 1$	

Полиноми се одземаат така што кон полиномот - намаленик се додаваат последователно членовите од полиномот - намалител со спротивни знаци. Потоа, во добиениот полином се сведуваат сличните мономи.

Од решените примери можеш да воочиш дека дадените полиноми се запишуваат во загради, а потоа се ослободуваме од заградите. Врз основа на правилата за собирање и одземање на полиноми, можат да се извлечат следните правила за ослободување од загради:

- Ако **пред заградата стои знак плус (+)**, тогаш заградата може да се изостави, а знаците на членовите во заградата остануваат непроменети.
- Ако **пред заградата стои знак минус (–)**, тогаш заградата и знакот минус можат да се изостават, а знаците на членовите во заградата се менуваат во спротивни.

Задача 3

Од полиномот $x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ одземи го:
а) мономот $5x^3$, б) биномот $-3x^2 + 2$, в) полиномот $2x^3 + x^2 + x + 1$.

Задача 4

Пресметај ги разликите:
а) $(3x^2 + 2xy - 8y^2) - (x^2 + 2xy + y^2)$, б) $(6x^2 - 5xy + 4y^2) - (2x^2 - 3y^2)$.

Пример 4

Во кабинетот за биологија, учениците истражуваат раст на два различни видови растенија во зависност од количината на ѓубриво што ја добиваат. Растот на првото растение се опишува со полиномот $2x^2 + 3x + 4$, а на второто растение со полиномот $x^2 + 5x + 2$.

По неколку дена, истражувачите додаваат дополнителна количина на ѓубриво, која го зголемува растот на секое растение за $2x$ единици.

а) Колку ќе биде новиот раст на секое растение по додавањето на ѓубриво?

б) Колку ќе биде вкупниот раст на двете растенија заедно по додавањето на ѓубриво?

в) За колку растот на првото растение е поголем од растот на второто по додавањето на ѓубриво?

а) Новиот раст на првото растение ќе биде

$(2x^2+3x+4)+2x=2x^2+\underline{3x}+4+\underline{2x}=2x^2+\ 5x+4.$

Новиот раст на второто растение ќе биде

$(x^2+5x+2)+2x=x^2+\underline{5x}+2+\underline{2x}=x^2+7x+2\,.$

б) Вкупниот раст се добива со собирање на двата полиноми:

$(2x^2+5x+4)+(x^2+7x+2)=\underline{2x^2}+\underline{\underline{5x}}+\underline{\underline{\underline{4}}}+\underline{x^2}+\underline{\underline{7x}}+\underline{\underline{\underline{2}}}=3x^2+12x+6.$

в) За да се направи споредба на растот се одземаат полиномите:

$(2x^2+5x+4)-(x^2+7x+2)=\underline{2x^2}+\underline{\underline{5x}}+\underline{\underline{\underline{4}}}-\underline{x^2}-\underline{\underline{7x}}-\underline{\underline{\underline{2}}}=x^2-2x+2\,.$

Првото растение има раст за $x^2 - 2x + 2$ поголем од второто растение.

Задача 5

Учениците подготвуваат цветни леи во училишниот двор. Првата леа ја уредува групата на Марија, а втората групата на Петар.

Бројот на цветови засадени во првата леа е даден со полиномот $2x^2 + 3x + 5$, а бројот на цветови засадени во втората леа со полиномот $x^2 + 4x + 2$ (x е должината на леата).

а) Колку цветови засадиле двете групи заедно? б) Колку цветови повеќе има првата леа?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Собери ги полиномите:

а) $-2x^2 + 3x - 5$ и $3x^2 + 4x + 2$, б) $7x^3 + 2x + 6$ и $3x^3 + 5x^2 - 5$, в) $x^2 + x - 1$ и $3x^3 + 2x^2 - 3$.

2. Најди го збирот $(x^4 + 4x^2y - 5xy - 2x + 7) + (2y^3 - 4x^2y + 3xy + y - 6)$.

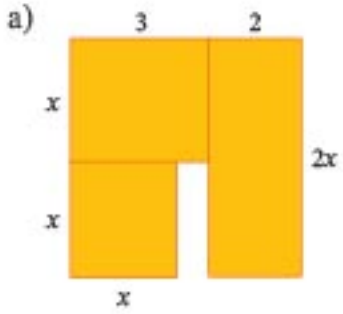
3. Определи ја разликата $(2x^2 + 3xy - 5y - 2x + 4) - (2y^3 - 4xy + 2y - 3)$.

4. Собери ги полиномот $9x^3 + 10x^2 - 5x + 7$ и разликата на биномите $x + 2$ и $x^3 + 9$.

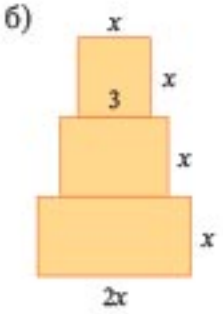
5. Пресметај го полиномот P:

а) $5a^2 + 2a - 3 + P = 9 - 6a + 2a^2$, б) $5b^2 + b + 15 - P = 15 + 3b + 7b^2$.

6. Запиши полином во нормален вид со кој ќе ја изразиш плоштината на формата на цртеж 2 и цртеж 3.



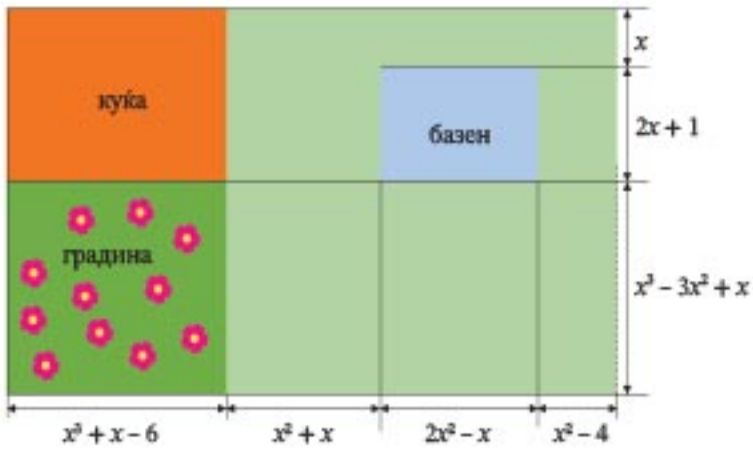
црт. 2



црт. 3

7. За време на една автомобилска трка, по x секунди првиот автомобил има поминато $20x^2 + x + 50$ метри, вториот $15x^2 + x + 30$ метри, а третиот $10x^2 + x + 20$ метри. Колку метри изнесува растојанието меѓу:
а) првиот и вториот автомобил, б) вториот и третиот автомобил,
в) првиот и третиот автомобил?

8. На цртеж 4 е прикажан двор со куќа, градина и базен. Запиши полином во нормален вид со кој ќе го изразиш периметарот на: а) базенот, б) куќата, в) целиот двор.



црт. 4

Истражување

Дадени се полиномите $A = 2x^3 + 4x$, $B = 2x^2 - 4$ и $C = -2x^3 + 4$.
а) Најди го степенот на полиномите A, B, C, $A + B$, $A + C$. Што забележуваш?
б) Според примерот, каква е врската меѓу степените на полиномите – собироци и степенот на полиномот – збир?
в) Изведи општ заклучок за врската меѓу степените на полиномите – собироци и степенот на полиномот – збир.

5. МНОЖЕЊЕ ПОЛИНОМИ

Множење мономи

Активност

1. Помножи ги степените $x^3 \cdot x \cdot x^2$.
2. Марко работи во лабораторија. Тој треба да подготви пакет шишиња со хемиски раствор. Секое шише треба да има иста количина која се пресметува според изразот $2x^2y$. Колкаво е вкупното количество на раствор што треба да го подготви Марко, ако пакетот содржи:
   а) 16 шишиња, б) x шишиња?

Пример 1

Најди го производот на мономите $-4x^2y^3$ и $5x^3yz$

Со примена на комутативното и асоцијативното својство за множењето добиваме дека:
$-4x^2y^3 \cdot 5x^3yz = (-4 \cdot 5) \cdot (x^2 \cdot x^3) \cdot (y^3 \cdot y) \cdot z = -20x^5y^4z$
Мономот $-20x^5y^4z$ е производот на мономите $-4x^2y^3$ и $5x^3yz$.

Производ на два мономи е моном чиј коефициент е еднаков на производот од коефициентите на множителите, а главната вредност е еднаква на производот од главните вредности на множителите.

За множењето на мономи важат комутативниот и асоцијативниот закон. Затоа можеме да зборуваме за производ на неколку слични мономи.

Пример 2

Пресметај го производот на мономите: а) $3a^2 \cdot \frac{2}{9}a^4$, б) $-a^2bc \cdot 5ab^3c$, в) $2xy \cdot (-5x^3z) \cdot yz^2$.

а) $3a^2 \cdot \frac{2}{9}a^4 = 3 \cdot \frac{2}{9} \cdot a^2 \cdot a^4 = \frac{2}{3}a^6$,
б) $-a^2bc \cdot 5ab^3c = -1 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a \cdot b \cdot b^3 \cdot c \cdot c = -5a^3b^4c^2$,
в) $2xy \cdot (-5x^3z) \cdot yz^2 = 2 \cdot (-5) \cdot 1 \cdot x \cdot x^3 \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z^2 = -10x^4y^2z^3$.

Задача 1

Пресметај го производот на мономите:
а) $3x^2 \cdot 4x^4$, б) $-2a^3b \cdot (-ab^2c)$, в) $6x^2y \cdot (-4xyz) \cdot \frac{1}{3}y^2z$.

Пример 3

Еден физичар пресметува енергија што ја создава некоја машина. Енергијата зависи од силата и растојанието, кои се дадени со алгебарските изрази: $F=\frac{3}{2}x^2y^3$ и $s=\frac{4}{3}x^3y$. Колкава е вкупната енергија E што ја создава машината, ако важи формулата $E=F\cdot s$?

Според формулата за вкупната енергија E што ја создава машината имаме

$E=F\cdot s=\frac{3}{2}x^2y^3\cdot\frac{4}{3}x^3y=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot x^2y^3\cdot x^3y=2x^5y^4$.

Значи машината создава енергија изразена со мономот $2x^5y^4$.

Задача 2

Мирсад возел $3xy$ часа со иста брзина $12x^2y$ километри на час. Најди го патот што го поминал, ако за брзината v, времето t и патот s важи формулата $s=v\cdot t$.

Множење полином со моном

Активност

Со помош на дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето и одземањето, упрости ги изразите: а) $2\cdot(3x+4)$, б) $(3x+4)\cdot 2$.

Пример 4

Изврши го множењето:

а) $-3x\cdot(2x+1)$, б) $(2a+b-1)\cdot(-a^2)$, в) $4x^3\cdot(x^2+2x+3)$, г) $(5x-3y^3)\cdot x^3y^2$.

а) $-3x\cdot(2x+1)$ — Го множиме мономот со секој член на полиномот.

$=-3x\cdot 2x+(-3x)\cdot 1$ — Добиените производи ги собираме.

$=-6x^2-3x$, — Го сведуваме полиномот во нормален вид.

б) $(2a+b-1)\cdot(-a^2)=2a\cdot(-a^2)+b\cdot(-a^2)-1\cdot(-a^2)=-2a^3-a^2b+a^2$,

в) $4x^3\cdot(x^2+2x+3)=4x^3\cdot x^2+4x^3\cdot 2x+4x^3\cdot 3=4x^5+8x^4+12x^3$,

г) $(5x-3y^3)\cdot x^3y^2=5x\cdot x^3y^2-3y^3\cdot x^3y^2=5x^4y^2-3x^3y^5$.

Полином се множи со моном така што секој член од полиномот се множи со мономот, а добиените производи се собираат.

Задача 3

Изврши го множењето:

а) $(3x+2y)\cdot 5$, б) $3a\cdot(a+1)$, в) $(2x^2+x-4)\cdot 3x$, г) $x^2y\cdot(xy+2x-4y^2)$.

Пример 5

Во една фабрика за текстил, должината на ткаенината што ја произведува машината при нормални услови се пресметува со изразот $x^3 + 2x^2 - x$. Кога температурата во просторијата ќе се зголеми, машината произведува $\frac{3}{2}x^2$ пати повеќе ткаенина. Колкава е вкупната должина на ткаенината што машината ќе ја произведе при зголемена температура?

Вкупната должина на ткаенината се добива со множење на полиномот и мономот:
$(x^3 + 2x^2 - x) \cdot \frac{3}{2}x^2 = x^3 \cdot \frac{3}{2}x^2 + 2x^2 \cdot \frac{3}{2}x^2 + (-x) \cdot \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^5 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^3$.
При зголемена температура, машината ќе произведе вкупна должина $\frac{3}{2}x^5 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^3$.

Задача 4

Градинарот сака да посади различни видови растенија во училишната градина. Едно дрво чини $4x^2y + 3xy^2 - 5$ денари, една грмушка чини $2x^2y - xy^2 + 4$ денари и едно цвеќе чини $5xy^2 - 3x^2y + 2$ денари. Градинарот купил 3 дрвја, 4 грмушки и 5 цвеќиња.

а) Запиши го изразот за вкупната цена на секој вид растение.

б) Запиши го изразот за вкупната цена на сите растенија.

в) Запиши го полиномот под б) во нормален вид.

г) Одреди го степенот на секој моном и степенот на полиномот.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Најди го производот на мономите:

а) $5x^3 \cdot 2x^4$, б) $-\frac{1}{4}a^2b \cdot (-2a^3b^2)$, в) $9xy^2 \cdot (-2x^3yz^2) \cdot \frac{1}{6}yz$.

2. Изврши го множењето:

а) $4 \cdot (5x - y)$, б) $-7 \cdot (2x - 3y)$, в) $(x^3 + 3x^2 - 4x + 2) \cdot 2x$, г) $-xy^2 \cdot (5x^2 + 2xy - 4y^2)$.

3. Збирот на мономите $-3a^2b^3$ и $2a^2b^3$ помножи го со мономот $-4ab$.

4. Разликата на мономите $-xy^2$ и $3xy^2$ помножи ја со нивниот збир.

5. Запиши моном во нормален вид кој ја изразува плоштината на правоаголникот (црт. 1):



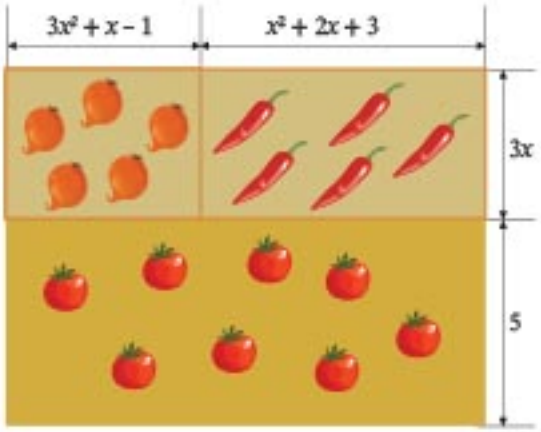
црт. 1

6. Миа има $4(x^2 + x + 1)$ книги. Лина има $5(2x^2 + 3)$ книги. Колку книги имаат Миа и Лина заедно?

7. Игор, Сара и Нина собираат поштенски марки. Игор има $4x(x - 4)$ поштенски марки. Сара има $2x(8 - x)$ поштенски марки, а Нина има $8(7 + 2x)$ поштенски марки. Колку поштенски марки имаат децата заедно?

8. Баба Мара во својата градина засадила домати, пиперки и кромид. Според изразите за димензиите на цртеж 2, запиши полином во нормален вид со кој ќе ја изразиш плоштината на:

а) делот засаден со кромид,
б) делот засаден со домати,
в) делот засаден со пиперки,
г) целата градина.



црт. 2

Истражување

Дадени се полиномите $A = 2x^3 + 4x$, $B = 2x^2$ и $C = -2x^3 + 4$.
а) Најди го степенот на полиномите A, B, C, $A \cdot B$ и $B \cdot C$. Што забележуваш?
б) Според примерот, каква е врската меѓу степените на полиномите – множители и степенот на полиномот – производ?
в) Изведи општ заклучок за врската меѓу степените на полиномите – множители и степенот на полиномот – производ.

6. ДЕЛЕЊЕ ПОЛИНОМ СО МОНОМ

Делење мономи

Активност

Подели ги степените $x^7 : x^3$.

Пример 1

Подели го мономот $12x^5y^4z^2$ со мономот $4x^3yz$.

Го запишуваме количникот $12x^5y^4z^2 : 4x^3yz$. Со делење на секој множител од деленикот со соодветниот множител од делителот, и запишување на добиените количници во вид на производ, добиваме
$12x^5y^4z^2 : 4x^3yz = (12 : 4) \cdot (x^5 : x^3) \cdot (y^4 : y) \cdot (z^2 : z) = 3x^3y^3z$.

Моном се дели со моном така што коефициентот на деленикот се дели со коефициентот на делителот, а степените на променливите од главната вредност на деленикот се делат со степените на соодветните променливи од главната вредност на делителот, а потоа добиените количници се запишуваат како производ.

Пример 2

Пресметај го количникот на мономите: а) $\frac{2}{3}a^7 : \frac{4}{5}a^4$, б) $-20a^3bc^2 : 4abc$, в) $-14x^5y^3 : (-7x^2y)$.

а) $\frac{2}{3}a^7 : \frac{4}{5}a^4 = (\frac{2}{3} : \frac{4}{5}) \cdot (a^7 : a^4) = (\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}) \cdot (a^7 : a^4) = \frac{5}{6}a^3$,

б) $-20a^3bc^2 : 4abc = (-20 : 4) \cdot (a^3 : a) \cdot (b : b) \cdot (c^2 : c) = -5a^2c$,

в) $-14x^5y^3 : (-7x^2y) = (-14 : (-7)) \cdot (x^5 : x^2) \cdot (y^3 : y) = 2xy^2$.

Пример 3

Количникот $8a^2 : 4ax = \frac{8a^2}{4ax} = \frac{2a}{x}$ не е моном бидејќи имаме делење со променлива. Тоа значи дека количникот на моном со моном може да биде и израз кој не е моном.

Задача 1

Пресметај го количникот на мономите:

а) $\frac{2}{9}a^5b^3 : \frac{1}{6}a^2b$, б) $-18a^4b^3c^2 : 6a^2b^2c$, в) $-9x^2y : (-15x^2y)$.

Пример 4

Еден инженер испитува густина на материјал што се добива кога се дели масата со волуменот. Масата и волуменот на материјалот се изразени со формулите $m = \frac{9}{4}x^5y^3$ и $V = \frac{3}{2}x^2y$. Колкава е густината ρ на материјалот, ако важи формулата $\rho = \frac{m}{V}$.

Ако го поделиме мономот $\frac{9}{4}x^5y^3$ со мономот $\frac{3}{2}x^2y$, добиваме

$\rho = \frac{9}{4}x^5y^3 : \frac{3}{2}x^2y = (\frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2}) \cdot (x^5y^3 : x^2y) = (\frac{\cancel{9}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}) \cdot (x^5 : x^2) \cdot (y^3 : y) = \frac{3}{2}x^3y^2$.

Густината на материјалот изнесува $\rho = \frac{3}{2}x^3y^2$.

Делење полином со моном

Активност

Со помош на десно дистрибутивно својство на делењето во однос на собирањето и одземањето, упрости го изразот $(6x + 4) : 2$.

Пример 5

Изврши го делењето:

а) $(18x + 12y) : 6$, б) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : (-x^3)$,

в) $(-9a^3b^2 - 6a^2b^3 + 15a^3b^3) : (-3a^2b^2)$, г) $(8x^3y + 6x^2y) : 2x^3y$.

Со примена на десно дистрибутивно својство на делењето во однос на собирањето и одземањето, добиваме:

а) $(18x + 12y) : 6$ — Го делиме секој член на полиномот со мономот.

$= 18x : 6 + 12y : 6$ — Добиените количници ги собираме.

$= 3x + 2y$, — Го сведуваме полиномот во нормален вид.

б) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : (-x^3) = 3x^5 : (-x^3) + x^4 : (-x^3) - 4x^3 : (-x^3) = -3x^2 - x + 4$,

в) $(-9a^3b^2 - 6a^2b^3 + 15a^3b^3) : (-3a^2b^2)$

$= -9a^3b^2 : (-3a^2b^2) - 6a^2b^3 : (-3a^2b^2) + 15a^3b^3 : (-3a^2b^2)$

$= 3a + 2b - 5ab$

г) $(8x^3y + 6x^2y) : 2x^3y = 8x^3y : 2x^3y + 6x^2y : 2x^3y = 4 + \frac{3}{x}$.

Добивме израз во кој еден негов член, $\frac{3}{x}$ не е моном. Значи, количникот на полином и моном може да биде и израз кој не е полином.

Полином се дели со моном така што секој член од полиномот се дели со дадениот моном, а добиените количници се собираат.

Задача 2

Изврши го делењето:

а) $(14x + 21) : 7$, б) $(27x^3y^4 - 36x^2y^3) : 9xy^3$,

в) $(4x^6 - x^4 + x^2) : (-2x^2)$, г) $(10x^2y^3 - 5x^2y^2 + 9x^3y^2) : (-15x^2y^2)$.

Пример 6

Еден земјоделец ја дели површината за наводнување на неколку еднакви делови. Вкупното количество вода што треба да се распредели на целата површина се пресметува со полиномот $\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y$.

Водата треба еднакво да се подели на секој дел од површината, а секој дел е претставен со мономот $\frac{3}{2}x^2y$. Колкаво количество вода ќе добие секој дел?

Ќе го поделиме полиномот $\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y$ со мономот $\frac{3}{2}x^2y$.

$(\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y) : \frac{3}{2}x^2y = \frac{9}{2}x^5y^3 : \frac{3}{2}x^2y + 3x^4y^2 : \frac{3}{2}x^2y - \frac{3}{4}x^3y : \frac{3}{2}x^2y$

$= \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{5-2}y^{3-1} + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{4-2}y^{2-1} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} x^{3-2}y^{1-1} = 3x^3y^2 + 2x^2y - \frac{1}{2}x$.

Секој дел од површината ќе добие количество вода изразена со полиномот $3x^3y^2 + 2x^2y - \frac{1}{2}x$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај го количникот на мономите:

а) $-8x^4y^3 : (-20x^2y)$, б) $\frac{3}{5}a^5b : \frac{3}{10}a^3b$, в) $\frac{3}{7}a^4b^3c^2 : (-\frac{5}{14}abc)$.

2. Изврши го делењето:

а) $(32a - 24b) : (-8)$, б) $(9x^2y + 12x^4y^2) : 3x^3y$,

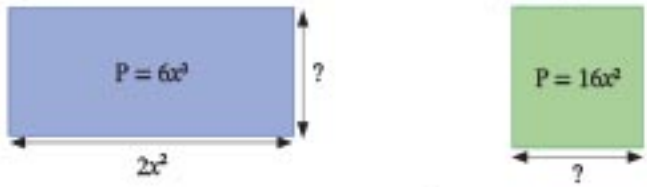
в) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : x^3$, г) $(14a^4 - 7a^3 + 24a^2) : (-21a^2)$.

3. Збирот на мономите $6a^4b^3$ и $9a^4b^3$ подели го со мономот $-5ab^2$.

4. Разликата на мономите $8xy^2$ и $6xy^2$ подели ја со нивниот збир.

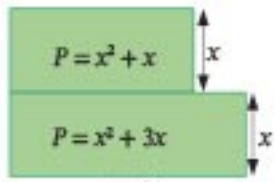
5. Запиши моном во нормален вид кој ја изразува страната на (црт. 1):

а) правоаголникот, б) квадртатот.

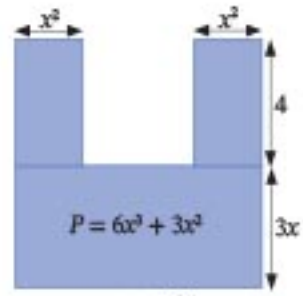


црт. 1

6. Запиши полином во нормален вид, кој ќе го изразува периметарот на секоја од формите на цртеж 2 и цртеж 3.



црт. 2



црт. 3

7. УПРОСТУВАЊЕ ЦЕЛИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Активност

Упрости го изразот: а) $2c(a + 1)$, б) $3a(b - c) - 5$.

Што претставуваат изразите кои ги доби, по упростување на секој од дадените изрази?

Изрази во кои константите и променливите се сврзани со операциите собирање, одземање, множење и степенување со показател ненегативен цел број се викаат **цели рационални изрази**.

Во согласност со дефиницијата, цел рационален израз **не содржи делење со променлива.** По упростувањето (извршување на назначените операции и ослободување од заградите), цел рационален израз преминува во полином. Тоа значи дека **секој полином е цел рационален израз.**

Цели рационални изрази се, на пример, изразите $-3x^2 + 2x + 5$, $(a + 1)(a - 2) + 4$, $\frac{3c^2 - 2}{6}$ итн. Како и кај полиномите (мономите) ќе сметаме дека константите во цел рационален израз се рационални броеви и променливите примаат вредности во множеството рационални броеви. Затоа, за упростување на цел рационален израз важат истите правила за редоследот на извршување на операциите и ослободувањето од заградите, како кај рационалните броеви. Понатаму под зборот „израз“ ќе подразбираме „цел рационален израз“.

Пример 1

Упрости го изразот $-(4ab + 6a - 7b) + (-ab - 2a + 3b) - (-ab + 2a + 3b)$.

$-(4ab + 6a - 7b) + (-ab - 2a + 3b) - (-ab + 2a + 3b)$ — Се ослободуваме од заградите.

$= -4ab - 6a + 7b - ab - 2a + 3b + ab - 2a - 3b$ — Ги сведуваме сличните мономи.

$= -4ab - 6a + 7b - ab - 2a + 3b + ab - 2a - 3b$ — Ги подредуваме членовите на добиениот полином.

$= -4ab - 10a + 7b.$

Задача 1

Упрости го изразот:

а) $10x - 6y + (3x - 5y) - (-4y - 2x)$,

б) $-(-a^2b + 3ab^2) - (7a^2 - ab^2 + 2b + 2a^2b)$.

Пример 2

Упрости го изразот: $-5y(x^3 - y) - x^3(2 - y)$.

$-5y(x^3 - y) - x^3(2 - y)$ — Се ослободуваме од заградите со примена на дистрибутивно својство.

$= -5yx^3 + 5y^2 - 2x^3 + x^3y$ — Ги сведуваме сличните мономи.

$= -5yx^3 + 5y^2 - 2x^3 + x^3y$

$= -4yx^3 + 5y^2 - 2x^3.$

Задача 2

Упрости го изразот:

а) $9y - 2(3x + 5y) + 4x - xy$,

б) $(x^2 - 0{,}4x^2y) \cdot 5x - 0{,}5y \cdot (y^2 - 6x^2y)$.

Пример 3

Упрости го изразот:
$2a + 3a \cdot (a - 1) + (28a^2 - 35b^2) : (-7)$.

$2a + 3a \cdot (a - 1) + (28a^2 - 35b^2) : (-7)$
$= 2a + 3a^2 - 3a - 4a^2 + 5b^2$
$= \underline{2a} + \underline{\underline{3a^2}} - \underline{3a} \underline{\underline{-4a^2}} + 5b^2$
$= -a^2 - a + 5b^2$

Задача 3

Упрости го изразот:
а) $(4x^2y + x^3y^2 + 6xy^2) : 2 + x(xy - y^2)$, б) $(3a^2 + 6a - 9b) : 3 + (-28b) : (-4) + 2a$.

Пример 4

Упрости го изразот:
$8a - \{2b \cdot (4a + 3b) - [\, 2a - 3a \cdot (5b + a)\,] - 4b^2\,\}$

$8a - \{2b \cdot (4a + 3b) - [\, 2a - 3a \cdot (5b + a)\,] - 4b^2\,\}$ Се ослободуваме од малите загради со множење.
$= 8a - \{8ab + 6b^2 - [\, 2a - 15ab - 3a^2\,] - 4b^2\,\}$ Се ослободуваме од средните загради.
$= 8a - \{8ab + 6b^2 - 2a + 15ab + 3a^2 - 4b^2\,\}$ Се ослободуваме од големите загради.
$= 8a - 8ab - 6b^2 + 2a - 15ab - 3a^2 + 4b^2$ Ги групираме сличните мономи.
$= \underline{8a} - \underline{8ab} - \underline{\underline{6b^2}} + \underline{2a} - \underline{15ab} - 3a^2 + \underline{\underline{4b^2}}$ Го упростуваме полиномот.
$= -3a^2 + 10a - 23ab - 2b^2$

Задача 4

Упрости го изразот:
а) $-\{\, 9x - [\, 4y \cdot (6 - x) - x \cdot (2 + 3y)\,] + (x - 3) \cdot 8y\,\}$, б) $0{,}2xy - \{\, 0{,}3y^2 + [0{,}5y + 0{,}2y \cdot (3x - 5y)]\}$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Упрости го изразот:
а) $a + b - 3 - a + 2a + 5b + 4$, б) $(3x^2 - 8) - (7x + 2) - (-x^2 - 6) - 2x + 5$.

2. Дадени се полиномите $A = x^2 - 3x + 1$, $B = 5x^2 + 2x - 3$ и $C = 4x^2 + 3x$.
Најди ги полиномите: а) $A + B + C$, б) $C - A$, в) $B - A - C$, г) $A - B$.

3. Упрости го изразот: а) $4a\,(a + b - 2)$, б) $-3a^2\,(5 - b) - 4b\,(2a^2 - 1) - 3(b - a^2)$.

4. Упрости го изразот:
а) $2x^2 + x\,(4x - 1)$, б) $2x^3\,(3x^2 - 1) - 4x(x^2 + 1)$,
в) $5xy^2 + 3y(x + xy - y) - 4xy$, г) $2x(x - y^2) + 7y + 4(x^2 + y) - 3xy$.

5. Упрости го изразот:
а) $5x^2 + (9x^4 - 6x^3 + 3x^2) : (-3) + 2x^3$, б) $(y^2 - 4y) \cdot (-y) + 8y^3 : (-2)$.

6. Упрости го изразот:
а) $2x^2 + x(x^2 - 3x + 1) + (5x^3 + 4x^2) : (-2) + 5$, б) $x(x + 3) + 2(x^2 + 2x + 1) - (x - 1) \cdot x$.

7. Упрости го изразот:
а) $3x(4x^2y - xy + 1) - x(xy + 2)$, б) $(3y^2 - 6x^2y + 12xy) : 3 + y(4x - 2y)$,
в) $2x(x^2y - 2xy + 1) + 2y \cdot (3x^3 - 5y) - x^2y$.

8. Упрости го изразот:
а) $6x^2 + 3x(5x - 2)$, б) $2x(3x^2 - 1) - 4(x + 1)$,
в) $6xy^2 + 5y(x + xy - 2y) - 7xy$, г) $2x(3x - y) + 9y + 7(x^2 + y) - 5xy$,
д) $-3x(x^2 - 2y + 1) - 5y(-x + 4)$, ѓ) $2x(x + 5y) + y(5x - 7y) - x^2(x - 3)$,
е) $2a(b - 4) - b(2a - 3) + ab(5a - 1)$.

9. Упрости го изразот:
а) $\{x^2 - [4x - x \cdot (2x + 3)] + (3x - 2) \cdot x\}$, б) $0{,}3y^2 - \{0{,}5xy^2 + [0{,}8y + (3x - 4) \cdot 0{,}5y^2]\}$.

8. ЗАМЕНА НА ПРОМЕНЛИВИ СО ЦЕЛИ БРОЕВИ ВО ЦЕЛИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ И ВО ФОРМУЛИ

Активност

Како ќе го пресметаш периметарот на правоаголник со помош на формулата $L = 2(a + b)$, ако се дадени страните $a = 3$ cm и $b = 2$ cm?

Ако променливите во **цел рационален израз** ги замениме со броеви, тогаш целиот рационален израз преминува во броен израз и можеме да ја пресметаме неговата вредност.

Пример 1

Пресметај ја бројната вредност на изразот $2x + 5$, за $x = 3$.

$2x + 5$
$= 2 \cdot 3 + 5$ — Променливата x ја заменуваме со дадената вредност 3.
$= 11$ — Ја пресметуваме бројната вредност на добиениот израз.

Пример 2

Пресметај ја бројната вредност на изразот $2x^2 + 3y - 1$ за $x = 3$ и $y = -4$.

На местото на променливите x и y ги заменуваме соодветните дадени вредности

$2x^2 + 3y - 1 = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot (-4) - 1 = 18 - 12 - 1 = 5.$

Бројната вредност на изразот за $x = 3$ и $y = -4$ изнесува 5.

Пример 3

Ако $x = -1$, $y = 3$ и $z = -2$, пресметај ја вредноста на изразот:

а) $3x^4 + y^2 + 5z^3$, б) $4(5x^3 - \frac{y^2}{3} - z)$.

а) $3x^4 + y^2 + 5z^3$
$= 3 \cdot (-1)^4 + 3^2 + 5 \cdot (-2)^3$
$= 3 + 9 - 40$
$= -28$

б) $4 \cdot (5x^3 - \frac{y^2}{3} - z)$
$= 4 \cdot (5 \cdot (-1)^3 - \frac{3^2}{3} - (-2))$
$= 4 \cdot (-5 - 3 + 2)$
$= 4 \cdot (-6)$
$= -24$

Скенирај го кодот и реши ги задачите.

Задача 1

Ако $x = 2$, $y = -3$, $z = 4$, пресметај ја вредноста на изразот:

а) $4x^2 + y^3 - 3z$, б) $5x - 2y - 3z$, в) $x^4 : (-2x^2) - y^3 + 2z^2$, г) $\frac{3x^2 + 2y}{6} - \frac{z^2}{8}$.

Да се потсетиме, **формула** е запис со кој се искажува врската меѓу неколку величини (променливи) и според кој пресметуваме една од нив.
Замена во формула е постапката со која на местото на променливите во формулата ги запишуваме дадените вредности за променливите.

Пример 4

Пресметај го периметарот L на рамнокрак триаголник со формулата $L = a + 2b$, ако основата $a = 3$ cm, а кракот $b = 5$ cm.

$L = a + 2b$
$L = 3 + 2 \cdot 5$ — Во формулата ги заменуваме дадените вредности за страните.
$L = 13$ cm — Ја пресметуваме бројната вредност на добиениот броен израз.

Задача 2

Патот што го поминува еден автомобил се пресметува со формулата $s = v \cdot t$, каде што v е брзината во km/h, а t е времето во часови. Колкав пат ќе помине автомобилот, ако:
а) $v = 60$ km/h и $t = 2$ h, б) $v = 80$ km/h и $t = 3$ h?

Пример 5

Најди ја вредноста на страната a на правоаголник со периметар $L = 46$ cm, ако $b = 5$ cm.

Во формулата за периметар на правоаголник $L = 2(a + b)$ ги заменуваме познатите вредности $L = 46$ cm и $b = 5$ cm и ја решаваме равенката со една непозната:

$46 = 2(a + 5)$
$23 = a + 5$
$a = 18$ cm

Пример 6

Пресметај ја вредноста на u во формулата $v = u + at$, ако $v = 35$, $a = -2$ и $t = 14$.

Со замена на дадените вредности за променливите во формулата, добиваме

$v = u + at$
$35 = u + (-2) \cdot 14$
$35 = u - 28$
$u = 35 + 28$
$u = 63$

Забележуваме дека во некои случаи, со замена во дадена формула, добиваме равенка што треба да ја решиме.

Задача 3

Дадена е формулата $y = 5x - 2$. Најди ја вредноста на x, ако: а) $y = 18$, б) $y = 33$, в) $y = 0$.

Пример 7

Цената C на билети за посета на група на кино се пресметува со формулата $C = 120a + 80b + 20c$, каде a е бројот на возрасни, b е бројот на деца и c е бројот на лица со посебен попуст.

а) Пресметај ја цената на билетите ако групата има 10 возрасни, 4 деца и 2 лица со посебен попуст.

б) Ако групата има 1580 денари за билети, а треба да влезат 4 деца и 3 лица со посебен попуст, колку билети за возрасни ќе можат да се купат?

а) Со замена на дадените вредности за променливите во формулата, добиваме
$C = 120a + 80b + 20c = 120 \cdot 10 + 80 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 1560$ денари

б) Со замена на дадените вредности за цената и бројот на лица во формулата
$C = 120a + 80b + 20c$ ја добиваме равенката
$120a + 80 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 1580$
$120a + 320 + 60 = 1580$
$120a = 1580 - 380$
$120a = 1200$
$a = 10$

Ќе можат да се купат 10 билети за возрасни.

Задача 4

Мајсторот Киро за бојадисување на станови наплатува според формулата $C = 100x + 80y + 250$, каде што x е плоштината што треба да ја бојадиса, y е количеството боја во килограми што треба да го употреби и 250 денари се трошоци за неговото доаѓање.

а) Пресметај ја цената што треба да се плати, ако за бојадисување на стан со површина 85 m² се потребни 5 kg боја.

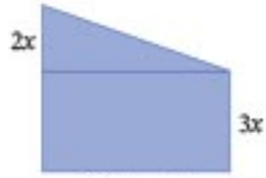
б) Бојан за својот стан со површина 40 m² му платил на мајсторот 6740 денари. Колку килограми боја потрошил мајсторот за станот на Бојан?

Задача 5

Запиши ја формулата за плоштина на секоја од формите на цртеж 1 и цртеж 2, упрости ја, а потоа пресметај ја плоштината ако $x = 3$ cm.



црт. 1



црт. 2

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Ако $x = -6$, пресметај ја вредноста на изразот: а) $2x^2 + 5$, б) $-3(x^2 - 4)$.

2. Ако $x = -2, y = 4$, пресметај ја вредноста на изразот: а) $x^3 - y + 5$, б) $2x^2 - y^2 + 3$.

3. Ако $x = 4, y = 1, z = -2$ пресметај ја вредноста на изразот: а) $x^2 - 5y + z^4$, б) $4(x + y) - z^2$.

4. Ако $x = 3, y = -1, z = 2$ пресметај ја вредноста на изразот:
а) $4(2x^2 - y^2) + 2(z^3 + 1)$, б) $3(x^3 + 2) - 2yz$.

5. Ако $x = -3$ и $y = 2$, пресметај ја вредноста на изразот:
а) $4(2x^2 - 3y) + 6x + 3(x - 2y^3) - 3xy$, б) $2(xy^3 - 4) + 3x^2y + 7(x + y) - 5xy$.

6. Ако $a = -2$ и $b = 4$, пресметај ја вредноста на изразот:

а) $-(ab-3)+2a-(-4a^3+2b-5)$, б) $2b-(3ab-9)-(-2a^2+b^2-1)$.

7. Пресметај ја вредноста на t од формулата $v = u + at$, ако $u = -5$, $a = 3$ и $v = 4$

8. Најди ја вредноста на x од формулата $y = -2x + 7$, ако: а) $y = 3$, б) $y = -3$.

9. Најди ја вредноста на y од формулата $z = xy + 2$, ако: а) $z = 26$ и $x = 3$, б) $z = -40$ и $x = 6$.

10. Формулата за вкупната маса M во декаграми на смути е $M = 2x^2y + 3xy + 4z$, каде што x е бројот на банани, y е бројот на јаболка и z е бројот на портокали.

а) Пресметај ја масата M на смути направено од 3 банани, 2 јаболка и 5 портокали.

б) Колку јаболка треба да стави Јована, ако стави 2 банани и 5 портокали, а сака да добие вкупно 62 декаграми смути?

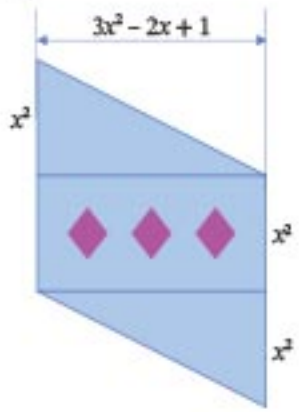
11. Запиши ја формулата за плоштина на килимот, упрости ја, а потоа пресметај ја плоштината ако $x = 2$ dm.(црт. 3 и црт. 4)

а)



црт. 3

б)



црт. 4

Истражување

Даден е изразот $4x^2$.

а) Пресметај ја вредноста на изразот за $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

б) Прецртај ја и пополни ја табелата:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Вредност на изразот							

в) За која вредност на x изразот има најмала вредност?

г) Во кој дел од табелата вредностите се намалуваат, а во кој се зголемуваат?

д) Забележи ги вредностите за: $x = -3$ и $x = 3$, $x = -2$ и $x = 2$, $x = -1$ и $x = 1$.
Има ли некаква „симетрија“ во добиените броеви? Објасни со свои зборови.

ѓ) Објасни како се менува вредноста на изразот, се зголемува или се намалува:

- кога x се зголемува од -3 до 0,
- кога x се зголемува од 0 до 3?

9. СОСТАВУВАЊЕ И РЕШАВАЊЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

Линеарна равенка

Активност

Разгледај ги равенките: $3x-7=2$, $-\frac{1}{3}a+2=0$ и $2(y-1)=4$.

а) Колку непознати има секоја од равенките? б) На кој степен е променливата?
в) Какви броеви се коефициентите на равенката?

- Равенка од облик
  $ax+b=c$, каде што a и b се рационални броеви и $a\neq 0$
  се вика линеарна равенка со една непозната.
- **Решение** на линеарна равенка со една непозната е секој рационален број за кој равенката преминува во точно бројно равенство.

Се договараме, секоја равенка што може да се сведе во облик на споменатата линеарна равенка со една непозната, да ја сметаме за линеарна равенка со една непозната.
Освен тоа, наместо линеарна равенка со една непозната ќе велиме линеарна равенка или само равенка.
Линеарни равенки се на пример, равенките $2x-4=7$, $-3(z+1)=z+1$, $-\frac{1}{3}x-4=3x$, итн.
Во постапката за решавање на равенки ќе примениме модел кој вклучува користење на симболи за променливите и константите. Симболите се правоаголници и квадрати кои според бојата и формата имаат вредност како во табелата:

симбол				
вредност	x	$-x$	1	-1

Равенката ја составуваме со собирање на симболите кои се сместени на иста страна од знакот $=$.

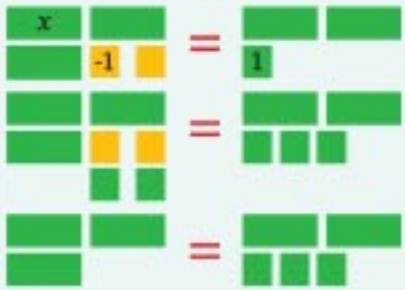
Пример 1

Според моделот на цртеж 1 состави равенка и реши ја.



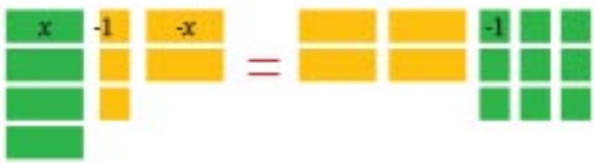
црт. 1

Според моделот двете страни на равенката ги запишуваме со собирање на соодветните симболи.

	/+  Со додавање два зелени квадрати на двете страни ги елиминираме жолтите на левата страна.	$3x-2=2x+1$ $3x-2=2x+1\ /+2$ $3x-2+2=2x+1+2$ $3x=2x+3$
	/+  Со додавање два жолти правоаголници на двете страни ги елиминираме зелените правоаголници на десната страна.	$3x=2x+3\ /-2x$ $3x-2x=2x+3-2x$
	Добиваме решение за x	$x=3$

Задача 1

Според моделот на цртеж 2 состави равенка и реши ја.



црт. 2

Алгебарска постапка за решавање равенки

Од постапката за решавање на равенка по даден модел, сигурно ги забележа следните правила за решавање на равенка:

- Ако кон левата и десната страна на дадена равенка се додаде или се одземе еден ист број или израз се добива равенка што ќе има исто решение со дадената равенка.
- Ако левата и десната страна на равенката се помножат или поделат со број различен од 0 се добива равенка што ќе има исто решение со дадената равенка.

Со примената на овие правила, комутативното и асоцијативното својство на собирањето, како и дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето и одземањето, може да добиеме **алгебарска постапка** за решавање на која било равенка.

Скенирај го кодот и реши ги равенките.

Пример 2

Реши ја равенката: а) $2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$, б) $\frac{x}{2}-\frac{2x}{9}=1$, в) $\frac{3x}{4}+1=\frac{5x}{6}-2$.

а) $2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ Ги множиме двете страни на равенката со НЗС(3, 6) = 6

$2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}/\cdot 6$ за да се ослободиме од именителите.

$12x+1=4/-1$ Одземаме 1 од двете страни од равенката за да остане на една страна само членот со x.

$12x=3/:12$ Ги делиме двете страни со 12 за да го добиеме решението.

$x=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Проверка: $2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

б) $\frac{x}{2}-\frac{2x}{9}=1/\cdot 18$ Ги множиме двете страни на равенката со НЗС(2, 9) = 18.

$18\cdot\frac{x}{2}-18\cdot\frac{2x}{9}=18\cdot 1$

$9x-4x=18$ Ги сведуваме сличните членови.

$5x=18/:5$ Ги делиме двете страни со 5.

$x=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$

Проверка: $\frac{3\frac{3}{5}}{2}-\frac{2\cdot 3\frac{3}{5}}{9}=1$.

в) $\frac{3x}{4}+1=\frac{5x}{6}-2/\cdot 12$ Ги множиме двете страни на равенката со НЗС(4, 6) = 12.

$\frac{3x}{4}\cdot 12+1\cdot 12=\frac{5x}{6}\cdot 12-2\cdot 12$

$3\cdot 3x+12=2\cdot 5x-24$

$9x+12=10x-24/-10x$ Одземаме $10x$ од двете страни од равенката за да го елиминираме членот со x од десната страна.

$-x+12=-24/-12$

$-x=-36/:(-1)$

$x=36$

Проверка: $\frac{3\cdot 36}{4}+1=\frac{5\cdot 36}{6}-2$.

Задача 2

Реши ја равенката: а) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$, б) $\frac{3x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{8x}{5}+1\frac{1}{4}$.

Пример 3

Реши ја равенката: а) $\frac{x}{5}-1\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(7-\frac{3x}{5})$, б) $1{,}2x+4{,}5=-3(0{,}8x-1{,}5)$.

а) $\frac{x}{5}-1\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(7-\frac{3x}{5})$ Се ослободуваме од заградите.

$\frac{x}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3x}{20}$ НЗС(5, 2, 4, 20) = 20

$\frac{x}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3x}{20}\ /\cdot 20$

$4x-30=-35+3x\ /-3x$

$x-30=-35\ /+30$

$x=-5$

Проверка: $\frac{-5}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3(-5)}{20}$.

б) $1{,}2x+4{,}5=-3(0{,}8x-1{,}5)$

$1{,}2x+4{,}5=-2{,}4x+4{,}5\ /-4{,}5$

$1{,}2x=-2{,}4x\ /+2{,}4x$

$3{,}6x=0\ /:3{,}6$

$x=0$

Проверка:
$1{,}2\cdot 0+4{,}5=-3\cdot(0{,}8\cdot 0-1{,}5)$.

Задача 3

Реши ја равенката: а) $\frac{x}{2}-(0{,}15+\frac{x}{3})=0{,}25$, б) $2{,}3x-3(0{,}7x+0{,}5)=-4{,}5$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Според моделот на цртеж 3 состави равенка и реши ја.



црт. 3

Реши ги равенките од задача 2 до задача 9.

2. а) $2x-\frac{x}{2}=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$, б) $x-\frac{2}{3}=\frac{x}{6}+\frac{1}{2}$, в) $\frac{3x-1}{9}=\frac{1}{6}+6$.

3. а) $\frac{2x}{5}-\frac{x}{2}=x-\frac{1}{10}$, б) $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}-5=2$, в) $\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}-\frac{x}{4}-\frac{x}{8}$.

4. а) $\frac{2x}{3}-3{,}5=\frac{x}{6}+\frac{2}{3}$, б) $0{,}4(x-1)+0{,}6-\frac{x}{10}=\frac{1}{2}$, в) $x-\frac{1}{3}(x+2)-0{,}5=-\frac{x}{6}+5$.

5. а) $\frac{x-1}{4}=-\frac{x}{3}$, б) $\frac{2x}{3}+1=2x+\frac{1}{3}$.

6. а) $0{,}8x-2{,}4=0{,}6(x+1)$, б) $2{,}5(3x+1)=0{,}5(2x+3)$.

7. а) $\frac{x-4}{3}+\frac{x}{2}=\frac{x}{6}$, б) $\frac{x+1}{5}+\frac{x}{10}=\frac{x}{2}+\frac{1}{5}$, в) $\frac{2x}{3}-9=\frac{4x}{9}-7$, г) $\frac{3x-1}{10}=\frac{x+1}{2}$.

8. а) $\frac{5}{18}(x-1)+\frac{1}{4}=-\frac{x}{2}$, б) $4(x-\frac{1}{4})-3(\frac{1}{3}+x)=2x-7$.

9. а) $\frac{5x}{3}-\frac{1}{6}-1{,}5x-\frac{3}{8}=\frac{11}{12}$, б) $\frac{4}{3}-0{,}75\cdot(2x-5)=\frac{5}{6}x$.

Истражување

Учениците Ана, Борис и Ердал решавале линеарни равенки со рационални коефициенти. Секој од нив направил грешка на различно место во решавањето. Откриј ги грешките и реши ги равенките правилно.

Ана	Борис	Ердал
$\frac{1}{2}x+5=\frac{3}{4}x+2$	$\frac{2}{3}(x-3)=\frac{1}{2}x+1$	$\frac{3}{4}x-2=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x=2-5$	$\frac{2}{3}x-3=\frac{1}{2}x+1$	$12\cdot\frac{3}{4}x-2=12\cdot\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}x=-3$	$\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x=1+3$	$9x-2=4x+\frac{1}{2}$
$x=-12$	$\frac{1}{6}x=4$	$9x-4x=\frac{1}{2}+2$
	$x=24$	$5x=\frac{5}{2}$
		$x=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

10. ПРИМЕНА НА ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Составување и решавање равенка за даден текстуален проблем

Равенките овозможуваат решавање текстуални задачи така што непознатата величина се поврзува со дадените величини.

Активност

Еден број е за 7 поголем од друг број. Збирот на двата броја е 31.

а) Колку е помалиот број?

б) Колку е разликата меѓу двата броја?

в) Што се добива, ако од збирот на броевите се одземе бројот 7? Образложи го твојот одговор.

Пример 1

Ева замислила некој број. Го помножила со 4, потоа одзела 3 и така добила број што е за 0,6 поголем од бројот што го замислила. Кој е бројот што го замислила Ева?

Бројот што го замислила Ева ќе го означиме со x.
Според условите на задачата ја составуваме линеарната равенка:

се добива

$$4x - 3 = x + 0,6$$

го помножила бројот x со 4 — одземала 3 — добила број за 0,6 поголем од x

Равенката ја решаваме:

$4x - 3 = x + 0,6$
$4x - 3 = x + 0,6 \;/\; -x$
$3x - 3 = 0,6 \;/\; + 3$
$3x = 3,6 \;/\; : 3$
$x = 1,2$

Проверка: $4 \cdot 1,2 - 3 = 1,2 + 0,6$.

Ева го замислила бројот 1,2.

Задача 1

Цената на моливот е $\frac{2}{5}$ од цената на гумата. Молив и гума заедно чинат 40 денари. Колку чини гумата, а колку моливот?

Скенирај го кодот и состави ги изразите.

Пример 2

Првиот ден од тридневната екскурзија Нина потрошила $\frac{1}{4}$ од парите што ги понела. Вториот ден потрошила 200 денари, па за третиот ден ѝ останале $\frac{2}{3}$ од почетниот износ. Колку пари понела Нина на екскурзија?

Да го означиме со x износот што Нина го понела на екскурзија.
Според условите на задачата:

- првиот ден потрошила $\frac{1}{4}x$ денари
- вториот 200 денари
- третиот ден имала $\frac{2}{3}x$ денари.

Нивниот збир е почетниот износ што го понела Нина, па ја решаваме равенката:

$\frac{1}{4}x + 200 + \frac{2}{3}x = x$
$\frac{1}{4}x + 200 + \frac{2}{3}x = x \;/\; \cdot 12$
$3x + 2400 + 8x = 12x$

$11x + 2400 = 12x / -12x$
$11x - 12x + 2400 = 12x - 12x$
$-x + 2400 = 0 / -2400$
$-x + 2400 - 2400 = 0 - 2400$
$-x = -2400 / \cdot (-1)$
$x = 2400$ Проверка: $\frac{1}{4} \cdot 2400 + 200 + \frac{2}{3} \cdot 2400 = 2400$

Нина понела 2400 денари на екскурзија.

Задача 2

Дарја потрошила $\frac{3}{7}$ од парите што ги имала за тетратки, $\frac{5}{14}$ од парите за моливи и 150 денари за блок за цртање. Колку пари имала Дарја?

Пример 3

Алма и Нела тргнале на купување со ист износ пари. Откако Алма потрошила 400 денари и на Нела ѝ позајмила 400 денари, $\frac{3}{4}$ од моменталниот износ на Алма бил еднаков на $\frac{1}{2}$ од моменталниот износ на Нела. По колку пари имале Алма и Нела кога тргнале на купување?

Почетниот износ кој го имала секоја од девојчињата ќе го означиме со x.
По потрошените 400 и позајмените 400 денари:
Алма имала $x - 800$ денари.
Нела имала $x + 400$ денари.
Во тој момент, според условот на задачата, за парите што ги има секоја од нив важи равенката:

$$\frac{3}{4} \cdot (x - 800) = \frac{1}{2} \cdot (x + 400).$$

Ја решаваме добиената равенка:

$$\frac{3}{4}(x - 800) = \frac{1}{2}(x + 400) \ / \cdot 4$$
$$3(x - 800) = 2(x + 400)$$
$$3x - 2400 = 2x + 800$$
$$3x - 2x = 2400 + 800$$
$x = 3200$ Проверка: $\frac{3}{4} \cdot (3200 - 800) = \frac{1}{2} \cdot (3200 + 400)$

Алма и Нела кога тргнале на купување имале по 3200 денари.

Задача 3

Виктор и Мартин имале ист износ пари. Откако Виктор му дал на Мартин 600 денари, $\frac{2}{3}$ од моменталниот износ на Виктор бил еднаков на $\frac{1}{2}$ од моменталниот износ на Мартин. По колку пари имале Виктор и Мартин на почетокот?

Составување текстуални проблеми за дадена равенка

Пример 4

Состави текстуална задача според равенката: а) $2x + 35 = 49$, б) $x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x$.

Реши ја равенката и објасни го решението во контекст на поставениот текст.

За дадена равенка може да се состават повеќе текстуални проблеми.

а) Текстуалниот проблем во врска со дадената равенката може да гласи:
Теа има двојно повеќе години од сестра ѝ, а за 35 години помалку од мајка ѝ, која има 49 години. Колку години има сестра ѝ на Теа?

Според условот во задачата, доаѓаме токму до дадената равенка $2x + 35 = 49$.
Ја решаваме равенката:

$2x + 35 = 49$
$2x = 49 - 35$
$2x = 14$
$x = 7$ Проверка: $2 \cdot 7 + 35 = 49$

Добивме број со кој навистина можеме да изразиме возраст на дете. Ова значи дека добро сме го составиле проблемот.

б) Во дадената равенка гледаме дека непознатата x е целина од која се одземени деловите $\frac{1}{5}x$, $\frac{1}{3}x$ и бројот 110 после што останува $\frac{1}{10}$ од почетната целина x.
Можеме да претпоставиме дека бројот x е некој износ пари, па да го формулираме следниот текстуален проблем:

Од парите што ги имал кај себе, Диме $\frac{1}{5}$ потрошил за тетратки, $\frac{1}{3}$ за моливи и 110 денари за фломастери, а му останале $\frac{1}{10}$ од парите. Колку пари имал Диме?

Според условот во задачата, доаѓаме токму до равенката

$x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x.$

Ја решаваме равенката:

$x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x \;/\cdot 30$
$30x - 6x - 10x - 3300 = 3x$
$11x = 3300$
$x = 300$ Проверка: $300-\frac{1}{5}\cdot 300-\frac{1}{3}\cdot 300-110=\frac{1}{10}\cdot 300$

Добивме резултат со кој може навистина да се изрази некој паричен износ, што значи дека сме составиле соодветен проблем.

Задача 4

Состави текстуална задача според равенката $x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}x-60=\frac{2}{5}x$.

Реши ја равенката и објасни го решението во контекст на поставениот текст.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Збирот на половината, третината и четвртината од бројот x е за 2 поголем од самиот број. Најди го бројот x.

2. Гоце и Миле работеле во градината. Гоце работел $\frac{3}{4}$ од времето што работел Миле. По колку часа работел секој од нив ако вкупно работеле 7 часа?

3. Паралелката 8-А има за еден повеќе ученици од паралелката 8-Б. Еден ден во 8-А биле отсутни $\frac{1}{5}$ од учениците, а во 8-Б биле отсутни $\frac{1}{6}$ од учениците и тој ден во двете паралелки имало еднаков број ученици. Колку ученици учат во 8-Б?

4. Во едно училиште $\frac{7}{8}$ од учениците учат англиски, а преостанатите учат германски јазик. Англиски учат за 420 ученици повеќе од оние што учат германски. Колку вкупно ученици има училиштето?

5. Секој ученик од 8-А одделение членува во точно една секција. $\frac{1}{6}$ од учениците членуваат во биолошката секција, $\frac{2}{5}$ во литературната секција, а 3 ученици во математичката секција. Колку ученици има во 8-А одделение?

6. Четвртината од аголот α и третината од аголот што е за $60°$ поголем од α имаат збир $62°$. Најди го аголот α.

7. Третината од аголот α е за $44°$ помала од аголот што е три пати поголем од α. Најди го аголот α.

8. Лена и Петар заедно имаат 117 години. Лена има $\frac{4}{5}$ од годините на Петар. Колку години има Петар?

9. Синот има една четвртина од годините на мајката, а ќерката една половина од годините на синот. Мајката и ќерката заедно имаат 54 години. Колку години имаат двете деца?

10. Заради одржување на приредба во фискултурната сала се однесени столчиња од некои од училниците. Од однесените столчиња $\frac{1}{5}$ се од кабинетот по хемија, $\frac{1}{6}$ од кабинетот по физика, $\frac{2}{15}$ од кабинетот по историја и 20 столчиња од кабинетот по математика. Колку вкупно столчиња се однесени во фискултурната сала?

11. а) Орхан имал 4000 денари. Откако купил 5 пакети млеко, му останале 720 денари. Колку чини пакет млеко?

б) Атлетичарот на тренинг истрчал 3850 метри, што е 9 круга и 250 метри. Колку метри е должината на еден круг?

12. Состави текстуална задача според равенката: а) $2500 - 3x = 550$, б) $3x + 56 = 177$.

Истражување

Замисли еден број, удвој го, додај 2, подели го резултатот со 2 и одземи 1. Го доби замисленият број.

Со помош на равенка објасни зошто секогаш го добиваш замисленият број.

11. НИЗИ ОД БРОЕВИ И ФОРМИ

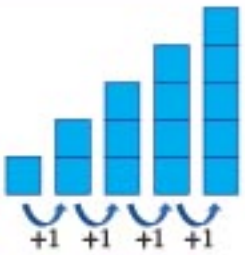
Активност

Колку квадратчиња има следниот член на низата?
По кое правило го одредуваш следниот член?
Запиши ги првите десет члена како бројна низа. , ...

Секоја **низа** се состои од објекти подредени во редослед, според некое правило.
Објектите на низата се нарекуваат **членови на низата.**

Пример 1

За формите на цртеж 1, забележуваме дека секој следен правоаголник има едно квадратче повеќе отколку претходниот правоаголник.
Правилото за одредување на следен член е „додај 1".



црт. 1

Пример 2

Да ја разгледаме бројната низа зададена со реченицата: „Секој следен член е еднаков на збирот на претходните два члена". Дали со оваа реченица е наполно определена низата?

Одговорот е не, бидејќи треба да ги знаеме првиот и вториот член. Веќе третиот член е збир на првиот и вториот член, четвртиот член е збир на вториот и третиот член, итн. Во овој случај низата ќе биде наполно определена, на пример, со реченицата „Првиот член е еден, вториот член е еден и секој следен член е збир на претходните два члена". Определената низа е 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Првиот член е 1, вториот член е 1, а правилото за определување следен член гласи „секој член е збир на претходните два".

Правило за определување следен член на една низа е начин на кој се добива секој следен член од претходните членови на низата.

Една низа е наполно определена со **првите неколку члена** и **правилото за определување следен член.**

Пример 3

Запиши ги првите 6 члена на низата со прв член 4 и правилото за определување следен член „додај 5".

Првите 6 члена на низата се: 4, $4 + 5 = 9$, $9 + 5 = 14$, $14 + 5 = 19$, $19 + 5 = 24$, $24 + 5 = 29$.

Пример 4

Дадена е низата 2, 6, 10, 14, 18, ...

а) Најди го правилото според кое се добива секој следен член на низата.

б) Запиши ги следните три члена на низата.

а) Забележуваме дека секој следен член е за 4 поголем од претходниот. Според тоа, правилото за определување следен член е „додај 4“.



б) Следните три члена на низата се: $18 + 4 = 22$, $22 + 4 = 26$, $26 + 4 = 30$.

Пример 5

Дадени се првите 4 члена на низа од форми со крукчиња (црт. 2). Најди го правилото за определување следен член и определи го бројот на крукчиња во следната форма во низата.



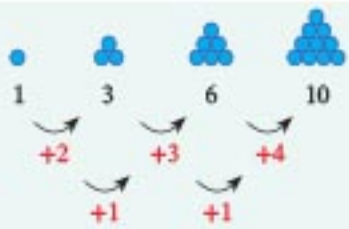
црт. 2

Првите 4 члена на низата се 1, 3, 6 и 10 (црт. 3).

Правилото за определување следен член ќе гласи: „додај ја разликата на претходните два члена зголемена за 1“.

Според ова правило, следната форма ќе има

$10 + (10 - 6 + 1) = 10 + 5 = 15$ крукчиња.



црт. 3

Задача 1

Дадена е низата 3, 9, 15, 21, ...

а) Најди го правило за определување следен член.

б) Запиши ги следните 3 члена на низата.

в) Запиши го десеттиот член на низата.

Скенирај го кодот и одреди ги низите.

Со правилото за определување следен член честопати тешко можеме да најдеме членови на некоја низа кои имаат поголеми редни броеви. Затоа, низите често се задаваат со зависноста на членот од неговиот реден број. Таа зависност е дадена со алгебарски израз.

Алгебарскиот израз со кој е дадена зависноста на кој било член од низата од неговиот реден број се нарекува **правило на општ член на низата.**

Ако се знае општиот член, тогаш лесно може да се најде кој било член на дадената низа.

Пример 6

Дадена е низата со општ член $2n + 3$. Најди ги:
а) првите 5 члена, б) членовите со реден број 100 и 300.

а) Ако во изразот за општиот член на низата $2n + 3$ ги заменуваме редните броеви на првите пет члена, 1, 2, 3, 4 и 5, добиваме
$2 \cdot 1 + 3 = 5$, $2 \cdot 2 + 3 = 7$, $2 \cdot 3 + 3 = 9$, $2 \cdot 4 + 3 = 11$, $2 \cdot 5 + 3 = 13$.
Значи, првите 5 члена на низата се: 5, 7, 9, 11 и 13.

б) За да ги определиме стотиот и тристотиот член во низата, во изразот за општиот член $2n + 3$ заменуваме $n = 100$ и $n = 300$. Така добиваме
$2n + 3 = 2 \cdot 100 + 3 = 203$, $2n + 3 = 2 \cdot 300 + 3 = 603$.
Значи, стотиот член е 203, а тристотиот член е 603.

Задача 2

Дадена е низата со општ член $4n - 1$. Најди ги:
а) првите 3 члена, б) членовите со реден број 50 и 200.

Ако е познат општиот член на една низа можеме да провериме дали некој број е член на таа низа.

Пример 7

Дадена е низата со општ член $3n + 4$. Дали нејзин член може да биде бројот: а) 30, б) 49?

а) За да одговориме на ова прашање треба да ја решиме равенката $3n + 4 = 30$.
Добиваме $3n = 26$, односно $n = 26 : 3$. Решението на равенката не е природен број.
Бројот 30 не е член од низата.

б) Слично, ја решаваме равенката $3n + 4 = 49$, $3n = 45$, $n = 15$. Решението на равенката е природниот број 15. Бројот 49 е 15-тиот член на низата.

Задача 3

Дадена е низата со општ член $3n + 5$. Дали нејзин член може да биде бројот: а) 53, б) 68?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Колку мали рамностранни триаголници има следната форма во низата на цртеж 4?



црт. 4

2. Најди го правилото за определување следен член на низата форми на цртеж 5. Потоа, прецртај ја и пополни ја табелата.



црт. 5

реден број на формата	прва	втора	трета	четврта	петта	шеста
број на ѕвезди во формата						

3. Првиот член на низата е 100. Секој следен член на низата се добива по правилото за определување следен член „подели со 2“. Најди го петтиот член на низата.

4. Најди го правилото за определување следен член на низата:

а) 1, 2, 4, 8, 16,..., б) 600, 300, 150, 75,..., в) 12, 26, 40, 54,...,

г) 89, 86, 83, 80,...., д) 243, 81, 27, 9,... .

5. За низата 3, 8, 13, 18,.....:

а) најди го правилото за определување следен член,

б) запиши ги следните 3 члена на низата.

6. Најди ги непознатите членови a, b, c и d на низата и запиши го можното правило за определување следен член:

а) a, b, 5, 7, c, d,...., б) a, b,10, 18, c,..., в) a, 24, 18, b, c, d,..., г) a, b, 0, -8, c, d,... .

7. Дадена е низата со општ член $3n - 1$. Најди ги:

а) првите 3 члена, б) членовите со реден број 54 и 125.

8. Дали може броевите 35, 23, -15, 77, 98 да бидат членови на низата со општ член $4n + 7$?

9. Во една книжарница има попуст на лектири. Првиот ден, се продадени 6 лектири, вториот ден се продадени 11 лектири, третиот ден се продадени 16 лектири, итн. Колку лектири се продадени осмиот ден, ако секој нареден ден се продаваат 5 лектири повеќе од претходниот?

10. Зоки сака да нареди 55 трупци така што во најгорниот ред ќе има 1 трупец, а во секој следен под него по 1 трупец повеќе. Колку трупци ќе има во најдолниот ред?

12. ОПРЕДЕЛУВАЊЕ ОПШТ ЧЛЕН НА НИЗА

Ако го знаеме општиот член на низата, тогаш лесно можеме да најдеме кој било член на дадена низа, независно од неговата позиција во низата. Затоа, потребно е да најдеме начин за определување на општиот член на низата.

Активност

Запиши ги првите 3 члена на низата со општ член: а) $n + 1$, б) $3n - 2$,

Пример 1

Најди го општиот член на низата чиј прв член е 2, а правилото за следен член е „додај 3“.

Составуваме табела, така што во првата редица од табелата, ги внесуваме редните броеви на членовите, а во втората соодветните членови на низата 2, 5, 8, 11, 14, 17.
Во третата редица го внесуваме производот од разликата меѓу членовите на низата и редниот број на членот $3n$.

реден број n	1	2	3	4	5	6
член	2	5	8	11	14	17
$3n$	3	6	9	12	15	18

Сега забележуваме дека производот $3n$ треба да го намалиме за 1 за да ги добиеме членовите на низата. Значи, општиот член на оваа низа е $3n - 1$.

Забележуваме дека низата од претходниот пример расте.
Да видиме како ќе го одредиме општиот член ако низата опаѓа.

Пример 2

Најди го општиот член на низата чиј прв член е 2, а правилото за следен член е „одземи 3“.

Составуваме табела, така што во првата редица, пак, ги внесуваме редните броеви на членовите, а во втората соодветните членови на низата 2, −1 , −4, −7, −10,...
Правилото за одредување следен член е „одземи 3“, па третата редица ќе биде производот на разликата −3 и редниот број n.

реден број n	1	2	3	4	5	6
член	2	−1	−4	−7	−10	−13
$-3n$	−3	−6	−9	−12	−15	−18

Забележуваме дека производот $-3n$ треба да го зголемиме за 5 за да ги добиеме членовите на низата.
Значи, општиот член на оваа низа е $-3n + 5$.

Скенирај го кодот и разгледај како се креираат низите.

Пример 3

Општината започнала проект за засадување дрвја покрај патот што води до училиштето. Првиот ден засадиле 3 дрвја. Секој следен ден саделе по 3 дрвја повеќе отколку претходниот ден.
а) Колку дрвја ќе засадат третиот, четвртиот и петтиот ден?
б) Најди го општиот член на низата.
в) Колку вкупно дрвја ќе бидат засадени по 10 дена?
г) Ако акцијата продолжи, во кој по ред ден ќе бидат засадени 96 дрвја?

а) Прв ден: 3 дрвја; Втор ден: 3 + 3 = 6 дрвја; Трет ден: 6 + 3 = 9 дрвја;
Четврти ден: 9 + 3 = 12 дрвја; Петти ден: 12 + 3 = 15 дрвја.

б) Добиената низа е: 3, 6, 9, 12, 15, ...

реден број n	1	2	3	4	5	6
член	3	6	9	12	15	18
$3n$	3	6	9	12	15	18

Според табелата согледуваме дека општиот член на низата е $3n$.

в) Десеттиот ден ќе бидат засадени $3 \cdot 10 = 30$ дрвја.

По 10 дена ќе бидат засадени $30 + 27 + 24 + 21 + 18 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3 = 165$ дрвја.

г) Го бараме редниот број на членот 96 од низата 3, 6, 9,... Ја решаваме равенката

$3n = 96, \quad n = 32.$

Триесет и вториот член во низата е бројот 96.

Задача 1

Трајче купил елка висока 30 cm. Елката расте 2 cm неделно.

а) Колку ќе биде висока елката по 1 месец?

б) Најди го членот на низата што ја дава висината на елката по n недели.

в) Колку ќе биде висока елката по 8 месеци?

г) По колку недели елката ќе биде висока 230 cm?

Пример 4

Најди го општиот член на низата претставена со шемата (црт. 1).



црт. 1

Од вкупниот број на крукчиња во шемите можеме да ја формираме низата 5, 8, 11,..

Да ја разгледаме врската помеѓу редниот број и бројот на бели и сини крукчиња:

1 (реден број) · 3 (бели крукчиња) + 2 (сини крукчиња) = 5,

2 (реден број) · 3 (бели крукчиња) + 2 (сини крукчиња) = 8,

3 (реден број) · 3 (бели крукчиња) + 2 (сини крукчиња) = 11.

Во секој член на низата бројот на бели крукчиња е 3 · редниот број, а во секој член има дополнително уште 2 сини крукчиња.

Општиот член на низата ќе биде $3n + 2$.

Задача 2

Најди го општиот член на низата претставена со шемата (црт. 2).



црт. 2

Постојат ситуации во кои два или повеќе процеси се одвиваат истовремено, но по различни правила. Тоа значи дека треба да разгледуваме низа чии членови се заедничките членови на неколку низи.

Пример 5

Дадена е низа од кругови (црт. 3).



црт. 3

а) Колку вкупно кругови има стотиот член на низата?

б) Колку црвени кругови има стотиот член на низата?

в) Колку зелени кругови има членот кој има 20 црвени кругови?

а) Општиот член на низата 3, 6, 9,... , е $3n$. Стотиот член ќе биде $3 \cdot 100 = 300$.

б) Општиот член на низата од црвени кругови е $n+1$. Стотиот член е $100 + 1 = 101$.

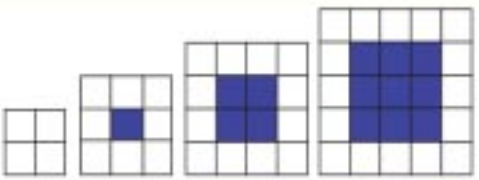
в) Од $n + 1 = 20$ добиваме $n = 19$, односно во 19-тиот член ќе има 20 црвени кругови Тогаш бројот на кругови е еднаков на $3 \cdot 19 = 57$, односно 19-тиот член има вкупно 57 круга. Од нив 20 се црвени, па зелени ќе бидат 37 круга.

Задача 3

Дадена е низата од форми (црт. 4).

а) Прецртај ја и пополни ја табелата:

број на сини квадрати				
број на бели квадрати				



црт. 4

б) Колку вкупно квадрати има десеттиот член на низата?

в) Колку бели квадрати има членот на низата во кој има 36 сини квадрати?

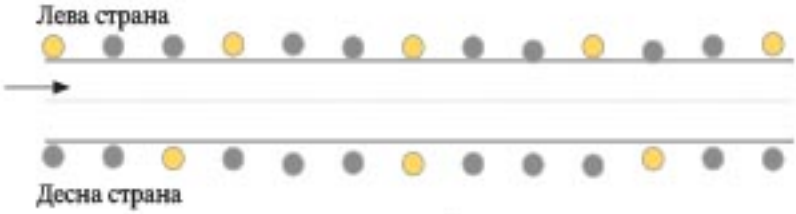
Пример 6

На еден автопат светилките од левата и десната страна на патот не светат постојано. Тие се вклучуваат и исклучуваат по одредени правила. На цртежот 5 со жолти крукчиња се означени вклучените светилки, а со сиви крукчиња се означени исклучените светилки.

а) Откриј го правилото по кое е вклучена секоја следна светилка од левата страна и секоја следна од десната страна на автопатот.

б) Дали е вклучена светилката на позиција 94 од левата страна?

в) На кои позиции се вклучени светилки истовремено од двете страни? Најди општо правило по кое се вклучени истовремено.



црт. 5

а) Од левата страна се вклучени светилките на позиција

1, 4, 7, 10,....

што значи дека вклучена е првата светилка, а правилото за следна вклучена светилка е „додај 3 позиции".

Од десната страна се вклучени светилките на позиција

3, 7, 11, 15,...,

а тоа значи дека првата вклучена светилка е на позиција 3, а секоја следна е вклучена по правилото „додај 4 позиции".

б) Ќе провериме дали 94 е член на низата 1, 4, 7, 10,.... Општиот член на низата е $3n - 2$.

Со решавање на равенката

$3n - 2 = 94,\ 3n = 96,\ n = 32,$

добиваме дека тоа е триесет и втората вклучена светилка во редот.

в) Низите со вклучени светилки лево и десно се:

1, 4, 7, 10,13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34,...

3, 7, 11, 15,19, 23, 27, 31, 35,...

Забележуваме кои позиции се појавуваат во двете низи, па низата со вклучени светилки на иста позиција е

7, 19, 31,....

Општиот член на низата 7, 19, 31,... е $12n - 5$.

Задача 4

Споени се три низи од новогодишни светилки, по една зелена, црвена и сина. На цртеж 6 се прикажани светилките од сите 3 бои кои се вклучени истовремено. Во празните полиња се моментално исклучените светилки.

а) Откриј го правилото според кое е вклучена секоја следна светилка во секоја од трите низи.

б) На која следна позиција ќе биде вклучена само црвената светилка?

в) Запиши ја низата со позиции на кои се вклучени трите светилки истовремено. Најди го општото правило на оваа низа.



црт. 6

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Определи го општиот член на низата:
а) 34, 30, 26,..., б) 25, 20, 15, 10,..., в) 8, 15, 22, 29,..., г) 4, 6, 8, 10,....

2. Низата има прв член 15, а правилото за следен член е „додај 5".
а) Запиши ги првите 6 члена. б) Најди го општиот член на низата.
в) Најди го 225-тиот член.

3. Најди го општиот член на низата претставена со шемата на цртеж 7.



црт. 7

4. Најди го општиот член на низата на цртеж 8.



црт. 8

5. Во дел од една спортска сала треба да се наредат столчиња во редови така што првиот ред ќе има 3 столчиња, а секој следен ред ќе има 3 столчиња повеќе од претходниот.
а) Колку столчиња ќе има во петтиот ред? б) Колку столчиња ќе има во десеттиот ред?
в) Напиши го бројот на столчиња во n-тиот ред.

6. Во првиот ред на една од трибините на фудбалскиот стадион има 56 навивачи. Во вториот ред има 59 навивачи, во третиот ред 62 навивачи, итн. Колку навивачи има во десеттиот ред?

7. Учениците спроведуваат акција за садење цвеќе во училишниот двор. Првиот ден засадиле 8 цвеќиња. Секој следен ден засадуваат по 5 цвеќиња повеќе отколку претходниот ден.
а) Колку цвеќиња ќе засадат третиот, четвртиот и петтиот ден?
б) Колку цвеќиња ќе засадат на n-тиот ден?
в) Колку вкупно цвеќиња ќе бидат засадени по 15 дена?
г) Ако акцијата продолжи, во кој по ред ден ќе бидат засадени 83 цвеќиња?

8. Еден брег од мраз на Северниот Пол бил висок 105 m. Заради топење на мразот, брегот секој месец губи по 3 m.
а) Колку ќе биде висок брегот по 10 месеци?
б) По колку месеци брегот сосема ќе се истопи?

9. а) Најди го правилото за следен член на низата форми на цртеж 9 и определи го вкупниот број на крукчиња во следната форма во низата.



црт. 9

б) Прецртај ја и пополни ја табелата:

број на црвени крукчиња					
број на сини крукчиња					

в) Колку сини крукчиња има членот на низата кој има 10 црвени крукчиња.

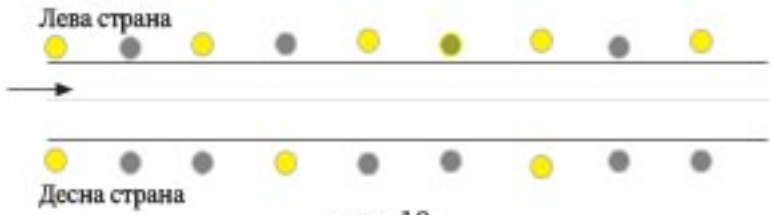
г) Колку вкупно крукчиња има педесеттиот член?

10. Во една улица сите улични светилки не светат секоја вечер. (црт. 10) Тие што светат се вклучени според посебни правила за левата и десната страна на улицата.

а) Откриј го правилото по кое е вклучена секоја следна светилка од левата страна и секоја следна од десната страна на улицата.

б) Дали е вклучена светилката на позиција 35 од левата страна?

в) На кои позиции се вклучени светилки истовремено од двете страни? Најди општо правило по кое се вклучени истовремено.

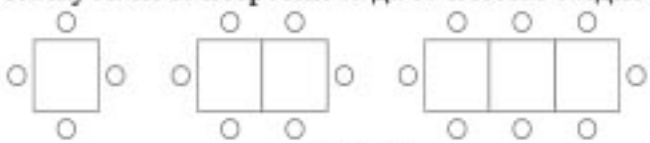


црт. 10

11. Околу една маса може да се постават 4 стола. На цртеж 11 е прикажано на кој начин се спојуваат масите за да се сместат повеќе лица.

а) Колку лица можат да се сместат на 15 споени маси?

б) Колку маси се потребни за да се сместат заедно 40 лица?



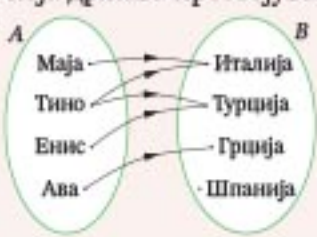
црт. 11

13. ФУНКЦИЈА

Поим за функција

Активност

Со релациите R_1, R_2 и R_3 од множеството ученици A = {Маја, Тино, Енис, Ава} во множеството држави B = {Италија, Шпанија, Грција, Турција} е определено кој ученик во која држава престојувал. Тие се претставени со помош на граф на цртеж 1.

а) 

Релација R_1

б) 

Релација R_2

в) 

Релација R_3

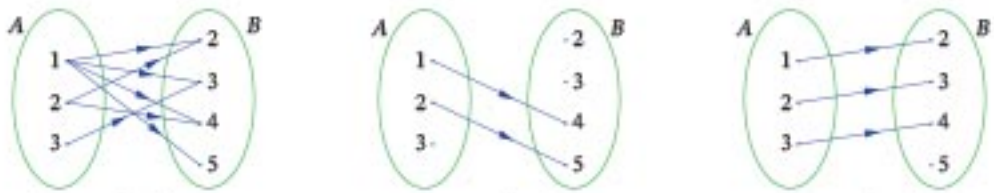
црт. 1

Според графот на релацијата:
а) R_1 утврди дали некој ученик посетил повеќе од една држава,
б) R_2 утврди дали постои ученик кој не посетил ниту една држава,
в) R_3 утврди дали секој од учениците посетил некоја држава.

Релација од множество A во множество B со која според некое правило на секој елемент $x \in A$ му е придружен точно еден елемент $y \in B$, се вика **функција** од множеството A во множеството B.
Множеството A се вика **домен**, а множеството B **кодомен** на функцијата.
Запишуваме $f: A \to B$ и читаме f е функција од A во B.

Пример 1

Од множеството $A = \{1, 2, 3\}$ во множеството $B = \{2, 3, 4, 5\}$ зададени се релациите:
R_1: „ ... е делител на ... “, R_2: „ ... е за 3 помал од ... “, R_3: „ ... е за 1 помал од ... “.
Тие се претставени со помош на граф на цртеж 2. Која од овие релации е функција?



Релација R_1 Релација R_2 Релација R_3

црт. 2

Со релацијата R_1, постои елемент во множеството A (елементот 1) што е во релација со два различни елементи од множеството B (постои елемент од кој излегуваат две стрелки).
Со релацијата R_2, постои елемент во множеството A (елементот 3) што не е во релација со ниту еден елемент од B (постои елемент од кој не излегува стрелка).
Со релацијата R_3, на секој елемент од множеството A му е придружен точно еден елемент од B (од секој елемент излегува точно една стрелка). Затоа релацијата R_3 е функција од множеството A во множеството B.

Задача 1

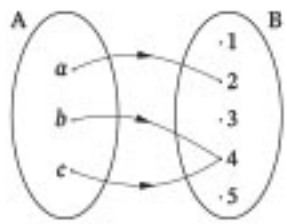
Нека се дадени множествата $M = \{1, 3, 5\}$ и $N = \{2, 4, 6\}$. Претстави ја со граф релацијата меѓу елементите на множествата M и N зададена со:
а) „ ... е 2 пати помал од ... “, б) „ ... е претходник на ...“, в) „ ... е делител на ...“.
Која од релациите е функција? Образложи го одговорот.

Нека е зададена функција $f: A \to B$. Ако на елементот $x \in A$ му е придружен елемент $y \in B$, тогаш за x велиме дека е **оригинал**, а за y велиме дека е **слика** на x. Во тој случај запишуваме $y = f(x)$.

Симболот x со кој означуваме кој било елемент од A, се вика **независно променлива**, а y или $f(x)$ се вика **зависно променлива** или **вредност на функцијата** соодветна на x.

Пример 2

За функцијата $f: A \to B$ на цртеж 3, најди ги:
а) оригиналот на елементот 2 од B,
б) сликата на елементот b од A.



црт. 3

а) Оригинал на елементот 2 од B е елементот a од A.
б) Слика на елементот b од A е елементот 4 од B и запишуваме $f(b) = 4$.

Нека $A = \{2, 4\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Од множеството A во множеството B е определена функција f со правилото „ ... е претходник на .... “ . Начинот на придружување на функцијата $f: A \to B$, може да го запишеме со **формула**

$f(x) = x + 1$ или $y = x + 1$, каде што $x \in A$.

Според формулата може да ги пресметаме вредностите на функцијата, соодветни на вредностите на независно променливата:

за $x = 2$ добиваме $f(2) = 2 + 1 = 3$, за $x = 4$ добиваме $f(4) = 4 + 1 = 5$.

Вредностите на независно променливата x и соодветните вредности на функцијата $f(x)$ може да ги организираме во **табела**.

x	2	4
$f(x)$	3	5

Во првиот ред ги запишуваме сите вредности на независно променливата x, а во вториот соодветните вредности на функцијата $f(x)$.

Скенирај го кодот и разгледај ги функциите.

Пример 3

Зададена е функцијата $f(x) = 3x - 1$.
а) Прецртај ја и пополни ја табелата. б) Најди ги доменот и кодоменот на функцијата.

x	5		9	
$f(x)$		20		32

а) Вредноста на функцијата ја наоѓаме со замена во формулата на функцијата:
за $x = 5$ добиваме $f(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14$,
за $x = 9$ добиваме $f(9) = 3 \cdot 9 - 1 = 26$.

Вредноста на независно променливата, за дадена вредност на зависно променливата, ја наоѓаме со замена во формулата на функцијата:

$20 = 3x - 1,\ \ 21 = 3x,\ \ x = 7$

$32 = 3x - 1,\ \ 33 = 3x,\ \ x = 11.$

Ја добиваме табелата:

x	5	7	9	11
$f(x)$	14	20	26	32

б) Од табелата согледуваме дека доменот е множеството $\{5, 7, 9, 11\}$.
Кодоменот е кое било множество што го содржи вредностите 14, 20, 26 и 32.

Задача 2

Зададена е функцијата $f(x) = 2(x - 1)$.

а) Прецртај ја и пополни ја табелата. б) Најди ги доменот и кодоменот на функцијата.

x			14	
$f(x)$	12	10		30

Функции во реални ситуации

Функциите имаат широка примена во природните науки, во техничките науки и во секојдневниот живот. Тие ни овозможуваат да разбереме состојби и да предвидиме промени кои се резултат на меѓусебната зависност на величините.

Пример 4

Во една лабораторија биологот го следи размножувањето на колонија бактерии и резултатите ги запишува во табела. На почетокот на следењето имало 9 000 бактерии.

а) Запиши функција (математички модел) со која ќе го изразиш бројот на бактерии y во зависност од бројот на изминати денови x.

б) Колку бактерии ќе има по седум дена?

ден	прв	прв	втор	втор
време на мерење	10:00	22:00	10:00	22:00
број на бактерии	9000	15000	21000	27000

а) Од табелата заклучуваме дека во рок до 24 часа се создаваат 12 000 нови бактерии, бидејќи

$21000 - 9000 = 12000$ и $27000 - 15000 = 12000$.

Бараната функција е $y = 12000x + 9000$.

б) По седум дена ќе има $y = 12000 \cdot 7 + 9000 = 93000$ бактерии.

Задача 3

Во еден резерват за птици истражувачите и волонтерите досега прстенувале 3500 птици. Планираат да продолжат со прстенување на 300 нови птици секој месец.

а) Запиши функција со која ќе го изразиш бројот на прстенувани птици y во зависност од бројот на изминати месеци x.

б) Колку прстенувани птици ќе има резерватот по 1 година?

Пример 5

Автомобилот на Јован троши 0,08 l гориво на секој километар поминат пат.

а) Запиши функција со која ќе го изразиш потрошеното гориво y (во литри) во зависност од изминатиот пат x (во километри).

б) Запиши функција со која ќе го изразиш потрошеното гориво y (во литри) во зависност од изминатиот пат x (во километри), ако се знае дека во тек на патувањето Јован потрошил уште 1,4 l гориво во мирување на возилото.

в) Колку литри гориво потрошил Јован, ако патот е долг 620 km?

а) Бараната функција е $y = 0{,}08x$. б) Функцијата е $y = 0{,}08x + 1{,}4$.

в) Јован потрошил $y = 0{,}08 \cdot 620 + 1{,}4 = 51\ l$.

Задача 4

Зависноста на масата на некоја материја од волуменот е дадена со формулата $m = \rho V$, каде што ρ е густина на материјата. Густината на млекото е 1,03 kg/l. Колку изнесува масата на:

а) млеко спакувано во амбалажа со волумен 0,5 l,

б) шише со 1 l млеко, ако шишето има маса 0,1 kg?

Пример 6

Една мала компанија што произведува керамички чаши сака да утврди колкава ќе биде нивната вкупна добивка, во зависност од бројот на произведени и продадени чаши. Фиксните трошоци на фирмата (струја, наем, транспорт) изнесуваат 12000 денари месечно. За секоја чаша се трошат 80 денари за материјал и работна рака. Продажната цена на една чаша е 150 денари.

а) Запиши функција со која ќе ја изразиш добивката y во зависност од бројот на произведени чаши x.

б) Пресметај ја добивката на фирмата, ако компанијата продаде 300 чаши.

в) Колку чаши треба да продаде компанијата за да нема ниту добивка, ниту загуба.

г) Објасни како оваа функција може да им помогне на фирмите при планирање на производството и продажбата.

а) Приходот на компанијата е $150x$ (цената по количеството). Вкупните трошоци се $12000 + 80x$.

Добивката е разликата меѓу приходите и трошоците:

$$y = 150x - (12000 + 80x) = 70x - 12000.$$

б) Ако компанијата продаде 300 чаши, добивката ќе биде
$y = 70 \cdot 300 - 12000 = 21000 - 12000 = 9000$ денари.

в) Нема ниту добивка, ниту загуба кога
$y = 0,\ \ 0 = 70x - 12000,\ \ x = 12000 : 70 \approx 171{,}4.$
Значи, компанијата мора да продаде најмалку 172 шолји за да не биде во загуба.

г) Оваа функција им овозможува на сопствениците: да предвидат добивка или загуба за кое било количество на производство, да ја планираат цената на една чаша, како и да одлучат дали вреди да се зголеми производството или да се намалат трошоците.

Задача 5

Една мала компанија што изработува памучни маици со печат сака да утврди колкава ќе биде нивната вкупна добивка, во зависност од бројот на произведени и продадени маици. Фиксните трошоци на фирмата (наем на локал, струја, интернет, одржување на машините) изнесуваат 15 000 денари месечно. За секоја маица се трошат 120 денари за материјал, боја и работна рака. Продажната цена на една маица е 260 денари.

а) Запиши функција со која ќе ја изразиш добивката y во зависност од бројот на продадени маици x.

б) Пресметај ја добивката на фирмата ако продадат 250 маици во еден месец.

в) Колку маици треба да продаде фирмата за да нема ниту добивка, ниту загуба?

г) Објасни како овој математички модел може да ѝ помогне на фирмата при планирање на производството и продажбата.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Нека се дадени множествата $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Меѓу елементите на множествата A и B е зададена релацијата: а) „ ... е за 5 помал од ... “, б) „ ... е 3 пати помал од ... “. Која од овие релации е функција?

2. Во едно домаќинство, потрошувачката на вода зависи од бројот на луѓе кои живеат во куќата. Познато е дека секој човек во просек троши по 60 литри вода дневно.

а) Прецртај ја и пополни ја табелата.

број на луѓе	1	2	4	6
потрошувачка на вода (l)				

б) Напиши правило со кое ќе ја изразиш врската меѓу бројот на луѓе и потрошувачката на вода.

в) Дали оваа врска е функција?

г) Што би претставувале доменот и кодоменот во овој случај?

3. Во едно мало истражување учениците запишале колку чаши вода пијат во текот на денот:

ученик	Ана	Бојан	Селма	Арбен
број на испиени чаши вода	6	8	5	8

а) Дали оваа врска меѓу учениците и бројот на испиени чаши вода определува функција?

б) Ако одговори со да, напиши ги доменот и кодоменот.
Ако одговорот е не, објасни зошто врската не определува функција.

4. Прецртај ги и пополни ги табелите, ако $f(x) = 2x + 5$ и $g(x) = 3(x - 2)$.
со помош на дадената функција:

x	3	7		
$f(x)$			25	35

x		8		12
$g(x)$	9		24	

5. Мила на одмор понела 15 000 денари и решила дека секој ден ќе троши по 1200 денари. Запиши функција со која ќе го изразиш износот на пари y (во денари) во зависност од бројот на денови x.

6. Продавачот на праски треба да плати 600 денари дневен закуп на тезга на пазар. Праските ќе ги продава по 90 денари за килограм.

а) Запиши функција што ја изразува зависноста на износот на пари y (во денари) од количеството продадени праски x (во килограми)?

б) Колку ќе заработи продавачот ако продаде 150 килограми праски?

7. Еден брод досега има поминато 250000 km. Утре тргнува на крстарење на кое ќе поминува по 120 km на ден.

а) Запиши функција која ја изразува зависноста на број поминати километри на бродот y од бројот на денови x поминати на патување?

б) Колку километри вкупно ќе има поминато бродот по 10 дена?

8. Во продавница, за секое купено количество над 1000 денари се одобрува попуст од 10%.

а) Запиши функција што ја определува вкупната цена y од износот на сметката x.

б) Објасни како оваа функција им помага на трговците да планираат ценовни политики.

9. Една мала пекарница што произведува мафини сака да утврди колкава ќе биде нивната вкупна добивка, во зависност од бројот на произведени и продадени мафини. Фиксните трошоци на пекарницата (струја, наем, плати, вода) изнесуваат 9000 денари месечно. За секој мафин се трошат 30 денари за состојки и работна рака.
Продажната цена на еден мафин е 70 денари.

а) Најди го математичкиот модел (функцијата) што ја определува зависноста на добивката y од бројот на продадени мафини x.

б) Пресметај ја добивката на пекарницата ако продаде 400 мафини.

в) Колку мафини треба да продаде пекарницата за да нема ниту добивка, ниту загуба?

г) Објасни како оваа функција може да ѝ помогне на пекарницата при планирање на производството и продажбата.

14. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА. ГРАФИК НА ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Линеарна функција

Активност

Билет за кино чини 150 денари.
За колку ќе се зголеми износот што треба да го платиме, ако купиме уште 1 билет, уште 2 билета, и така натаму? Дали сумата секогаш се зголемува за ист износ? Колкав е тој износ?

Функцијата од облик $y = kx + n$ (или $f(x) = kx + n$) каде што k и n се рационални броеви се вика **линеарна функција.**
Бројот k се вика **коефициент на правец**, а бројот n - **слободен член** на линеарната функција.

Функциите $y = 7x$, $y = 2x - 3$, $y = 1 - 5x$, $y = \frac{1}{2}x - 3$, $y = -\frac{3}{4}x + 2$, $y = x + \frac{3}{7}$ се линеарни функции.

Пример 1

Такси-компанија наплаќа 50 денари при поаѓање и 20 денари за секој km. Во табелата е дадена цената што треба да ја платиме по секој изминат километар.

растојание (km)	0	1	2	3
цена (денари)	50	$20 \cdot 1 + 50 = 70$	$20 \cdot 2 + 50 = 90$	$20 \cdot 3 + 50 = 110$

Забележуваме дека по секој изминат километар плаќаме уште 20 денари.
Зависноста меѓу растојанието x и цената што треба да ја платиме y е определена со линеарната функција $y = 20x + 50$.
Коефициентот на правец е $k = 20$ и покажува за колку се зголемува y, ако x се зголеми за 1.
Слободниот член е $n = 50$ и ја покажува почетната вредност, односно вредноста на y кога $x = 0$.

Задача 1

Кој е коефициентот на правец, а кој слободниот член на функцијата:
а) $y = 2x + 3$, б) $y = 5x$, в) $y = 4$, г) $y = x - 2$?

Задача 2

Запиши ја формулата на линеарната функција со коефициент на правец и слободен член:
а) $k = 3$, $n = -1$, б) $k = 0, n = -2$, в) $k = -1, n = 0$, г) $k = 0, n = 0$.

График на линеарна функција

Пример 2

Нацртај го графикот на линеарната функција $y = x + 4$.

Според формулата на линеарната функција

$$y = x + 4$$

ја пресметуваме вредноста на y за неколку вредности на x. На пример:

за $x = -3$, $y = -3 + 4 = 1$; за $x = -2$, $y = -2 + 4 = 2$; за $x = -1$, $y = -1 + 4 = 3$;

за $x = 0$, $y = 0 + 4 = 4$; за $x = 1$, $y = 1 + 4 = 5$; за $x = 2$, $y = 2 + 4 = 6$.

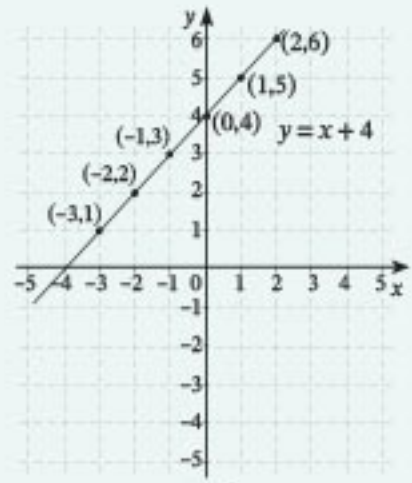
Добиените вредности може да ги запишеме во табела:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	1	2	3	4	5	6

Подредните парови: $(-3, 1)$, $(-2, 2)$, $(-1, 3)$, $(0, 4)$, $(1, 5)$ и $(2, 6)$ ја задоволуваат формулата на линеарната функција $y = x + 4$. За нив велиме дека се точки од **графикот на линеарната функција**.

Добиените подредени парови може да ги претставиме како точки во координатен систем, така што на x – оската се нанесува првата координата, а на y – оската се нанесува втората координата.

Со поврзување на овие точки добиваме **права** што визуелно го прикажува графикот на линеарната функција $y = x + 4$ (црт. 1).



црт. 1

Пример 3

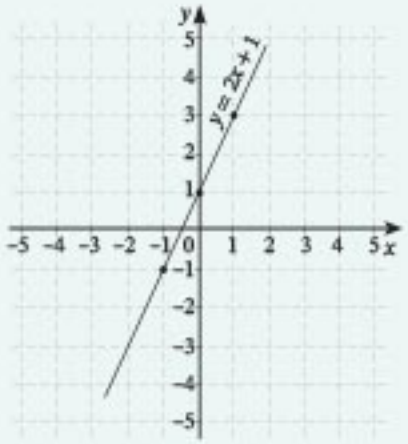
Нацртај го графикот на линеарната функција $y = 2x + 1$.

Графикот на линеарната функција е права, па доволни се две точки за да го нацртаме (црт. 2).
Составуваме табела во која ќе внесеме две произволни вредности за x.
Потоа, со формулата на линеарната функција $y = 2x + 1$, ги пресметуваме соодветните вредности за y:

за $x = -1$, $2 \cdot (-1) + 1 = -1$; и за $x = 0$, $2 \cdot 0 + 1 = 1$.

x	-1	0
y	-1	1

Така добивме две точки од графикот на линеарната функција: $(-1, -1)$ и $(0, 1)$. Ќе ги претставиме точките во координатен систем, ќе ја повлечеме правата што минува низ нив и на правата ќе ја запишеме формулата. Добиената права е графикот на линеарната функција $y = 2x + 1$.



црт. 2

Задача 3

Нацртај го графикот на функцијата:
а) $y = -3x + 2$, б) $y = x - 2$.

Скенирај го кодот и нацртај ги функциите.

Линеарни функции со ист коефициент на правец. Линеарни функции со ист слободен член

Активност

Растението A има висина 5 cm, а растението Б има висина 3 cm. Двете растенија растат со иста брзина од 2 cm седмично.
а) Пресметај ги висините на растенијата во првите 5 седмици.
б) Како се менува висината на растенијата секоја седмица?
в) Што е исто кај растенијата?

Пример 4

Температурата по изгрејсонце во Скопје била 3 °C, а во Битола била −1 °C. Во двата града температурата се зголемува за 2 °C на секој час.

а) За секој град, изрази ја со линеарна функција зависноста меѓу времето и температурата. Објасни што забележуваш.

б) Нацртај ги графиците на двете линеарни функции во ист координатен систем. Објасни што забележуваш.

а) За секој град ги означуваме со x часовите по изгрејсонце и со y соодветните температури во градот. Во табелата се дадени вредностите на температурите во двата града, за неколку часа по изгрејсонце.

број на часови по изгрејсонце (x)	температура во Скопје (y_1)	температура во Битола (y_2)
0	3 °C	−1 °C
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$ °C	$2 \cdot 1 - 1 = 1$ °C
2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$ °C	$2 \cdot 2 - 1 = 3$ °C
3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$ °C	$2 \cdot 3 - 1 = 5$ °C

Зависноста меѓу времето x и температурата y_1, односно y_2 во секој од градовите е определена со линеарните функции:

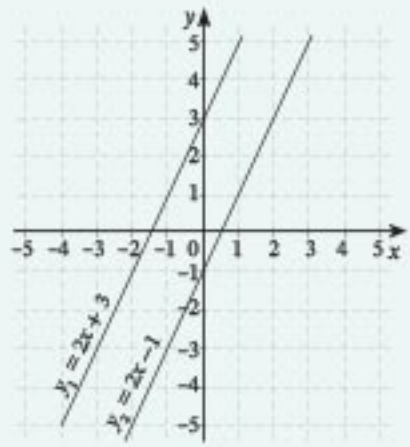
$y_1 = 2x + 3$, за Скопје и $y_2 = 2x - 1$, за Битола.

Забележуваме дека двете функции имаат **ист коефициент на правец** еднаков на 2.

б) На цртеж 3 се нацртани во ист координатен систем графиците на линеарните функции

$y_1 = 2x + 3$ и $y_2 = 2x - 1$.

Забележуваме дека графиците на линеарните функции се **паралелни прави**.



црт. 3

Графиците на линеарни функции со **ист коефициент** на правец се **паралелни прави**.

Задача 4

Во ист координатен систем нацртај ги графиците на линеарните функции

$y_1 = -3x + 1$ и $y_1 = -3x - 3$.

а) Каква е заемната положба на графиците на линеарните функции?

б) Спореди ги коефициентите на правец на линеарните функции.

Активност

Марко и Адора штедат на различен начин. Марко има 100 денари и секој месец штеди по 300 денари. Адора има 100 денари и секој месец штеди по 500 денари.

а) Како се менува висината на заштедата на Марко и Адора секој месец?

в) Што е исто кај двајцата?

Пример 5

Ана и Беким имаат по 3 налепници. Ана секој ден додава по 2 нови налепници во својата колекција. Беким секој ден подарува по една налепница на неговиот другар.

а) За секое дете, изрази ја со линеарна функција зависноста меѓу бројот на изминати денови и бројот на налепници, Објасни што забележуваш.

б) Нацртај ги графиците на двете линеарни функции во ист координатен систем. Објасни што забележуваш.

а) Кај Ана се зголемува бројот на налепници секој ден за еден, кај Беким се намалува за две.

Нека x е бројот на изминати денови, y бројот на налепници. Во табелата се дадени бројот на налепници кај двете деца, во период од неколку денови.

број на изминати денови (x)	број на налепници на Ана (y_1)	број на налепници на Беким (y_2)
0	3	3
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$	$-1 \cdot 1 + 3 = 2$
2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$	$-1 \cdot 2 + 3 = 1$
3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$	$-1 \cdot 3 + 3 = 0$

Зависноста меѓу бројот на изминати денови x и бројот на налепници y_1, односно y_2 е определена со линеарните функции:

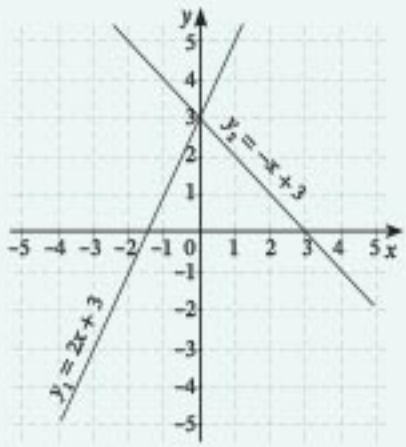
Ана $y_1 = 2x + 3$, и Беким $y_2 = -x + 3$.

Забележуваме дека двете функции имаат **ист слободен член** еднаков на 3.

б) На цртеж 4 се нацртани во ист координатен систем графиците на линеарните функции

$y_1 = 2x + 3$ и $y_2 = -x + 3$.

Забележуваме дека графиците на линеарните функции се сечат на y – оската во точката (0,3).



црт. 4

Графиците на линеарни функции со ист слободен член n се прави кои ја сечат y – оската во точка $(0, n)$.

Задача 5

Во ист координатен систем нацртај ги графиците на линеарните функции:
$y_1 = -3x - 1$ и $y_2 = x - 1$.
а) Во која точка се сечат графиците на линеарните функции?
б) Спореди ги слободните членови на линеарните функции.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Кој е коефициентот, а кој слободниот член на функцијата:
а) $y = 3x + 4$, б) $y = x$, в) $y = -5$, г) $y = -x - 2$?

2. Запиши ја формулата на линеарната функција со коефициент и слободен член:
а) $k = -3$, $n = -4$, б) $k = 0$, $n = 3$, в) $k = 6$, $n = 0$, г) $k = 2$, $n = -5$.

3. Нацртај го графикот на линеарната функција: а) $y = -x + 3$, б) $y = 3x - 2$, в) $y = 2x$.

4. Распореди ги линеарните функции во групи од меѓу себе паралелни прави:
$y = 2x + 15$, $y = 5x - 7$, $y = x + 3$, $y = -7x - 2$, $y = 2x$, $y = 5x$,
$y = -7x + 3$, $y = 2x - 3$, $y = -7x$, $y = x$, $y = 5x - 1$, $y = 2x - 7$.

5. Запиши ја линеарната функција чијшто график е права паралелна со правата $y = 5x - 6$ и ја сече y – оската во точката $(0, 7)$.

6. Запиши ја линеарната функција чијшто график е права паралелна со правата $y = 4x + 3$ и се сече со правата $y = x + 1$ на y – оската.

7. За која вредност на a, графиците на функциите $y = (2a + 3)x + 1$ и $y = (a - 5)x + 2$ се паралелни прави?

8. За која вредност на a, графикот на функцијата $y = (a + 2)x - 2a + 3$ ја сече y – оската во точката $(0,5)$?

9. Матеј тргнува со велосипед во 8 часот, а Андреј во 9 часот. Двајцата возат со константна брзина од 15 km/h.
а) Запиши ги формулите на линеарните функции кои го опишуваат движењето на Матеј и Андреј,
б) Нацртај ги нивните графици. Каква е нивната меѓусебна положба?

10. Душко и Давид за роденден добиле по 5000 денари. Душко решил да ги заштеди и секој ден да додава уште по 50 денари, а Давид секој ден од своите пари трошел по 100 денари.
а) Запиши ја линеарната функција што го изразува паричниот износ y (во денари) во зависност од времето x (во денови).
б) Кои се координатите на пресечната точка на графиците на двете функции?

Истражување

Размисли и објасни како може да го нацрташ графикот на линеарната функција $y = 3x - 1$, во ист координатен систем во кој е нацртан графикот на линеарната функција $y = 3x + 2$, без да правиш табела на вредности.

Воопшти го заклучокот за функција од облик $y = kx + n$.

15. ТЕК НА ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Поимот „тек“ природно го поврзуваме со тек на време, тек на река итн. Во таа смисла, реката има свој тек во кој нејзиниот водостој може да расте, да опаѓа или да остане константен. Ќе откриеме од што зависи текот на една линеарна функција.

Растечка линеарна функција

Активност

Африм вози велосипед кон врвот на Водно. Дали во следните минути ќе се промени надморската висина на која се наоѓа? Дали ќе се зголеми или ќе се намали?

Пример 1

Ива решила да штеди од својот џепарлак така што на својата заштеда од 2500 денари секој ден ќе додава по 75 денари.

а) Запиши ја линеарната функција за зависноста на заштедениот износ y (во денари) од времето на штедење x (во денови).

б) Со таблица претстави ја оваа зависност за првите 5 дена.

в) Каков е знакот на коефициентот на правец на линеарната функција?

г) Како се менува вредноста на променливата y со зголемување на вредноста на променливата x?

а) Почетната заштеда на Ива е 2500 денари. Секој ден таа додава по 75 денари, па по x дена таа ќе има $2500 + 75x$. Значи, определена е линеарната функција $y = 75x + 2500$.

б)

време на штедење x (во денови)	1	2	3	4	5
заштеден износ (y во денари)	2575	2650	2725	2800	2875

в) Коефициентот на правец е $k = 75 > 0$. Знакот на коефициентот на правец е позитивен.

г) Од табелата може да согледаме дека со зголемување на вредностите на променливата x се зголемува вредноста на променливата y. На пример, од $3 < 5$ имаме дека $2725 < 2800$.

За дадената линеарна функцијата велиме дека е **растечка функција**.

Пример 2

Во ист координатен систем нацртај ги растечките линеарни функции $y = x + 3$ и $y = 2x - 1$.

а) Која линеарна функција побрзо расте?

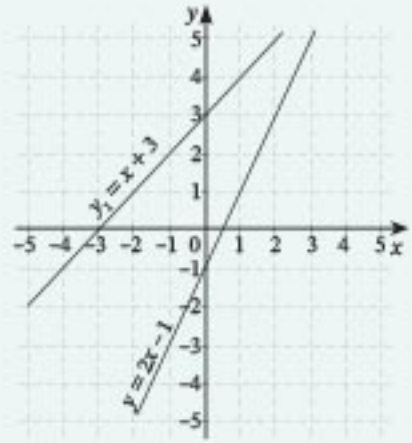
б) Спореди ги нивните коефициенти на правец? Што може да се заклучи?

Графиците на линеарните функции се прикажани на цртеж 1.

а) Од графиците гледаме дека графикот на линеарната функција $y = 2x - 1$ е пострмен од графикот на линеарната функција $y = x + 3$, па линеарната функција $y = 2x - 1$ **побрзо расте** од линеарната функцијата $y = x + 3$.

б) Линеарната функција $y = 2x - 1$ $(k = 2)$ има **поголем коефициент на правец** во однос на линеарната функција $y = x + 3$ $(k = 1)$.

x	0	1
$y = x + 3$	3	4
$y = 2x - 1$	−1	1



црт. 1

Меѓу две растечки линеарни функции, побрзо расте линеарната функција со поголем коефициент на правец.

Има ситуации од секојдневниот живот во кои со поставување на функција можеме да го предвидиме текот на настаните и да испланираме активности кои повеќе ни одговараат.

Пример 3

Компанијата 1 за мобилна телефонија ја има понудата: 1 денар за минута разговор и месечна претплата 200 денари.
Компанијата 2 нуди 2 денари за минута разговор и 100 денари месечна претплата.

а) За двете компании запиши ја линеарната функција за зависноста на цената y (во денари) од времетраењето на разговорите x (во минути).

б) Нацртај ги графиците на двете линеарни функции во ист координатен систем.

в) Објасни која компанија е поповолна во зависност од должината на разговорите во текот на месецот?

а) Линеарната функција за компанија 1 е $y = x + 200$.
Линеарната функција за компанија 2 е $y = 2x + 100$,

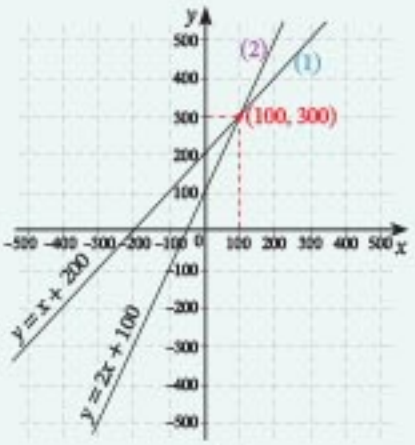
б) Графиците на двете линеарни функции во ист координатен систем се дадени на цртеж 2.

компанија 1

времетраење на разговори (x во минути)	0	50	100
цена (y во денари)	200	250	300

компанија 2

времетраење на разговори (x во минути)	0	50	100
цена (y во денари)	100	200	300



црт. 2

в) Правите се сечат во точка (100, 300).
Координатата $x = 100$ е бројот на минути.
Координатата $y = 300$ е месечната цена за разговор.
Вредностите на пресечната точка значат дека за 100 минути разговор ќе платиме исто (300 денари) кај двете компании.
За да одредиме која понуда е поповолна ќе го разгледаме текот на двете функции во однос на пресечната точка. Од графиците гледаме дека:

- ако зборуваме повеќе од 100 минути ќе ни одговара понудата чија цена побавно расте, а тоа е компанија 1.
- ако зборуваме помалку од 100 минути ќе ни одговара понудата чија цена побрзо расте, а тоа е компанијата 2.

Задача 1

На пазарот 1 се плаќа дневна закупнина 400 денари, а цената на јаболката е 50 денари за килограм.
На пазарот 2 дневната закупнина е 500 денари, а цената на јаболката е 70 денари за килограм.
а) Објасни на кој пазар повеќе му се исплати на продавачот да закупи тезга во зависност од продаденото количество јаболка.
б) На кој пазар продавачот ќе заработи повеќе ако продаде 400 kg јаболка, а на кој пазар ако продаде 800 kg јаболка?

Опаѓачка линеарна функција

Активност

Теона има 10 сокчиња. Таа секој ден ѝ дава по едно сокче на својата другарка Есма. Дали во следните неколку денови бројот на сокчиња на Теона ќе се зголеми или ќе се намали?

Пример 4

Андреа на својата сметка има 8500 денари. Секој ден од сметката троши по 500 денари.

а) Запиши ја линеарната функција за зависноста на износот на парите на сметката y (во денари) од изминатото време x (во денови).

б) Со таблица претстави ја оваа зависност за првите 5 дена.

в) Каков е знакот на коефициентот на правец на линеарната функција?

г) Како се менува вредноста на променливата y со зголемување на вредноста на променливата x?

а) Од условите гледаме дека почетниот износ од 8500 денари секој ден се намалува за 500 денари. Со тоа е определена линеарната функција $y = -500x + 8500$.

б)

време на трошење (x во денови)	1	2	3	4	5
износ на сметка (y во денари)	8000	7500	7000	6500	6000

в) Коефициентот на правец е $k = -500 < 0$. Знакот на коефициентот на правец е негативен.

г) Од табелата може да согледаме дека со зголемување на вредностите на променливата x се намалува вредноста на променливата y. На пример, за $2 < 4$ имаме дека $7500 > 6500$. За дадената линеарна функцијата велиме дека е **опаѓачка функција.**

Пример 5

Во ист координатен систем нацртај ги опаѓачките линеарни функции $y = -x + 3$ и $y = -2x + 1$.

а) Која линеарна функција побрзо опаѓа?

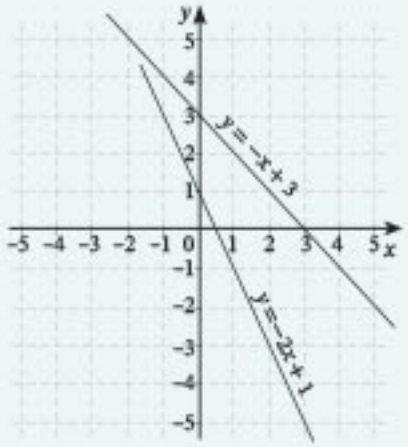
б) Спореди ги нивните коефициенти на правец? Што може да се заклучи?

Графиците на линеарните функции се прикажани на цртеж 3.

а) Од графиците гледаме дека графикот на линеарната функција $y = -2x + 1$ е пострмен од графикот на линеарната функција $y = -x + 3$, па линеарната функцијата $y = -2x + 1$ **побрзо опаѓа** од линеарната функцијата $y = -x + 3$.

б) Линеарната функција $y = -2x + 1$ $(k = -2)$ има **помал коефициентот на правец** во однос линеарната функција $y = -x + 3$ $(k = -1)$.

x	0	1
$y = -x + 3$	3	2
$y = -2x + 1$	1	−1



црт. 3

Меѓу две опаѓачки линеарни функции побрзо опаѓа линеарната функција со помал коефициент на правец.

Пример 6

Истражувачи поставиле термометри за да мерат температура на морската вода и воздухот на 2 локации од морскиот брег. Термометарот 1 мерел најпрво на површината на морето и секој час се спушта по 5 метри. Термометарот 2 се наоѓа 2 метри под морското ниво и истовремено со термометарот 1 почнува да се спушта по 4 метри на час.

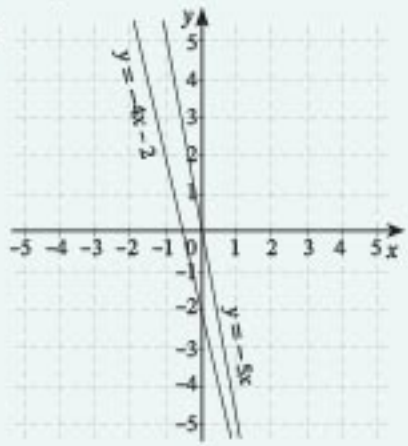
а) Запиши ги формулите за зависност на длабочината на која се наоѓа термометарот y (во метри) од времето на спуштање x (во часови) за двата термометри.

б) Нацртај ги графиците на двете функции во ист координатен систем.

в) Кој од термометрите побрзо ќе стигне да измери температура на локацијата која се наоѓа на -150 метри надморска висина?

а) За термометар 1 имаме: $y = -5x$, а за термометар 2 имаме: $y = -4x - 2$.

б)



црт. 4

в) Ако термометарот 1 е на -150 метри надморска висина имаме дека $y = -150$. Затоа, во формулата $y = -5x$ заменуваме $-150 = -5x$, па $x = 30$ часа.
За термометарот 2 имаме: $y = -4x - 2$, $-150 = -4x - 2$, $-148 = -4x$, $x = 37$ часа.
Термометарот 1 ќе стигне побрзо до локацијата што се наоѓа на -150 метри надморска висина.

Задача 2

Од врвот на ридот, Мерсиха се спушта со жичница, а Адем по скијачката патека по која ќе помине за 1 km подолг пат од патот што го поминува жичницата. Жичницата се движи со брзина 15 km/h, а Адем скија со брзина 25 km/h.

а) Запиши ги формулите за зависност на изминатиот пат y (во километри) од времето x (во часови) за спуштањето на Мерсиха и Адем,

б) Нацртај ги графиците на двете функции во ист координатен систем,

в) Колкав пат поминал секој од нив ако по 10 минути истовремено стигнале во подножјето на ридот?

Ниту растечка ниту опаѓачка линеарна функција

Активност

Една компанија произвела 300 продукти. Поради дефект на машините производството е прекинато. Дали бројот на продукти што ги произвела компанијата ќе се зголеми, ќе се намали, или ќе остане непроменет (ниту ќе се зголеми, ниту ќе се намали)?

Пример 7

Во еден фрижидер температурата е $-4°C$ во текот на цел ден.

а) Запиши формула за зависноста на температурата y во фрижидерот од бројот на часови x.

б) Со таблица претстави ја оваа зависност за првите 3 часа.

в) Колку е коефициентот на правец на линеарната функција?

г) Како се менува вредноста на променливата y во зависност од вредноста на променливата x?

а) Температурата изнесува $-4°C$ и не се менува во текот на денот. На тој начин е определена линеарната функција $y = -4$

б)

изминато време (x во часови)	1	2	3
температура (y)	$-4°C$	$-4°C$	$-4°C$

в) Коефициентот на правец е $k = 0$.

г) Од табелата може да согледаме дека со менување на вредностите на променливата x не се менуваа вредноста на променливата y. За дадената линеарна функцијата велиме дека е **ниту растечка ниту опаѓачка функција** (константна функција).

Линеарната функција $y = kx + n$ е:

- растечка, ако $k > 0$,
- опаѓачка, ако $k < 0$,
- ниту растечка ниту опаѓачка, ако $k = 0$.

Скенирај го кодот и разгледај ги графиците на функциите.

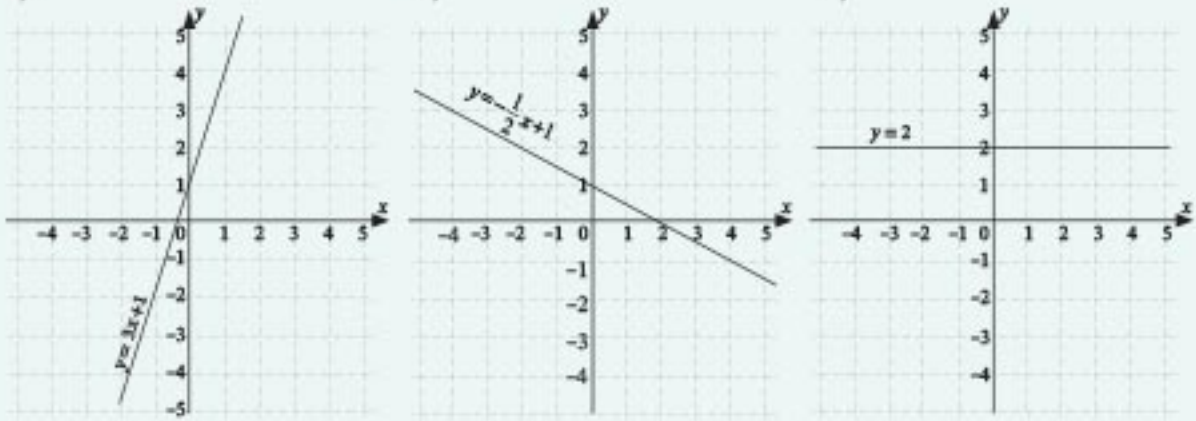
Пример 8

На цртеж 5 е даден графикот на линеарната функција: а) $y = 3x + 1$, б) $y = -\frac{1}{2}x + 1$, в) $y = 2$. За секоја од линеарните функции определи дали е растечка или опаѓачка или ниту растечка ниту опаѓачка.

Од графикот на линеарната функција $y = 3x + 1$ забележуваме дека со зголемување на вредностите на променливата x се зголемуваат вредностите на променливата y. Според тоа, линеарната функција е растечка.

Кај линеарната функција $y = -\frac{1}{2}x + 1$, со зголемување на вредностите на променливата x се намалуваат вредностите на променливата y. Според тоа, функцијата е опаѓачка. Линеарната функција $y = 2$ не е ниту растечка ниту опаѓачка.

а) б) в)



црт. 5

Задача 3

Дадени се линеарните функции:
$y = -x + 1, y = 4x + 1, y = -3x, y = -2x + 3, y = 2x$ и $y = x + 2$.

а) Нацртај ги растечките функции во еден, а опаѓачките во друг координатен систем.

б) Меѓу растечките линеарни функции определи која расте најбрзо?

в) Меѓу опаѓачките линеарни функции определи која опаѓа најбрзо?

Задача 4

Дадени се линеарните функции:
$y = -53x + 7$, $y = 8x + 19$, $y = -45$, $y = -50x + 23$, $y = 78x$, $y = x + 89$,
$y = -x + 95$, $y = 100x + 1$, $y = -325x$, $y = 25$, $y = x + 36$.
Запиши ги сите функции кои се:

а) растечки. Која од нив најбрзо расте? Зошто?
б) опаѓачки. Која од нив најбрзо опаѓа? Зошто?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Во ист координатен систем нацртај ги линеарните функции:

$y = x + 2, y = 5x - 3$ и $y = \frac{1}{4}x + 3$.

а) Дали функциите растат или опаѓаат? б) Која функција расте најбрзо?

2. Во ист координатен систем нацртај ги линеарните функции: $y = -x + 1, y = -3x + 2$ и $y = -\frac{3}{4}x$.

а) Дали функциите растат или опаѓаат? б) Која функција најбрзо опаѓа?

3. Дадени се линеарните функции:

$y = -3x + 5$, $y = 9x + 20$, $y = -75$, $y = -52x + 3$, $y = 87x$, $y = x + 9$,
$y = -x + 94$, $y = 50x + 3$, $y = -758x$, $y = 285$, $y = x + 96$.

Запиши ги сите функции кои се:

а) растечки. Која од нив најбрзо расте? б) опаѓачки. Која од нив најбрзо опаѓа?

4. Провери без цртање дали ќе биде растечка или опаѓачка функцијата за:

а) Вкупната цена на такси-превозот во зависност од бројот на поминати километри ако 50 ден е почеток и 30 денари секој километар;

б) Количината на вода во еден базен во зависност од времето, ако во базенот има 8000 литри вода, а секој час се испуштаат по 100 литри;

в) Износот што ќе ѝ остане на Азра во зависност од деновите поминати на одмор, ако понела 20000 денари, а планира да троши по 1500 денари дневно;

г) Износот на сметката за телефон во зависност од времетраењето на разговорите ако компанијата наплатува 200 денари претплата и 2 денари минута разговор.

5. Температурата во Охрид во 6 h наутро била –3 °C, а до пладне се зголемувала за 2 °C на секој час.

а) Запиши линеарна функција што ја изразува зависноста на температурата y (во Целзиусови степени) од времето x (во часови).

б) Нацртај го графикот на линеарната функција.

в) Испитај дали линеарната функција е растечка или опаѓачка.

г) Одреди кога температурата ќе биде 0 °C.

6. Марко има две понуди за работа во продавници за велосипеди. Во првата му нудат 1000 денари дневница и 500 денари од секој продаден велосипед, а во втората 1500 денари дневница и 200 денари од продаден велосипед.

а) Запиши ја линеарната функција што ја изразува зависноста на заработениот паричен износ y (во денари) од времето x (во денови).

б) Објасни која понуда е поповолна во зависност од бројот на продадени велосипеди.

7. Роза сака да вработи продавачка во својата цвеќарница. Се двоуми дали да ѝ понуди дневница од 1200 денари и 40 денари од секој продаден букет или 1500 денари и 20 денари од секој продаден букет. Последниот месец во цвеќарницата се продавале по 30 букети дневно.

а) За колку дневно продадени букети двете понуди се еднакво поволни?

б) Која понуда е поповолна за Роза ако продажбата остане на 30 букети дневно?

8. Градот сака да ја поттикне употребата на електрични тротинети за превоз до работа. Постојат две можности за граѓаните:
Можност А: Купување сопствен електричен тротинет по цена од 24000 денари, со дополнителен трошок за полнење од 20 денари на ден.
Можност Б: Изнајмување тротинет преку апликација по цена од 150 денари дневно, без други трошоци.

а) Запиши ги линеарните функции што ја определуваат зависноста на вкупната цена C од бројот на денови на користење x за двете можности.
б) Нацртај ги нивните графици во ист координатен систем.
в) Пронајди по колку дена користење трошоците за двете опции ќе бидат еднакви.
г) Објасни која опција е поповолна на краток, а која на долг рок и зошто.
д) Предложи едноставна промена во цените или условите што би ја направила опцијата Б подостапна за граѓаните.

Истражување

Беким се качува на лизгалката по функцијата y_1, а се спушта по функцијата y_2 (црт. 6).

а) Каков број е коефициентот на правец k_1 на функцијата y_1?

б) Каков број е коефициентот на правец k_2 на функцијата y_2?

в) Кои скали за качување ќе бидат пострмни: оние поставени според функцијата $y = 2x + 5$ или според функцијата $y = 3x + 4$?

г) Дали делот од лизгалката за спуштање може да биде поставен по константна функција? Објасни го одговорот.



црт. 6

16. ЗАПИШУВАЊЕ ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА ЗАДАДЕНА СО ГРАФИК

Пресеци на графикот на линеарна функција со координатните оски

Ако ја знаеме формулата на линеарната функција, можеме да ги најдеме точките во кои нејзиниот график ги сече координатните оски. Исто така, ако ги знаеме точките на пресек со оските, можеме да го нацртаме графикот на функцијата и да ја запишеме формулата на таа функција.

Активност

1. На која координатна оска припаѓа точката: а) (1,0), б) (0,–2)?
2. Провери дали точките (1,0) и (0,–2) припаѓаат на графикот на линеарната функција $y = 2x - 2$.

Пример 1

Дадена е функцијата $y = -2x + 4$.

а) Најди ги пресечните точки на графикот на линеарната функција со координатните оски.

б) Најди ја нулата на линеарната функција.

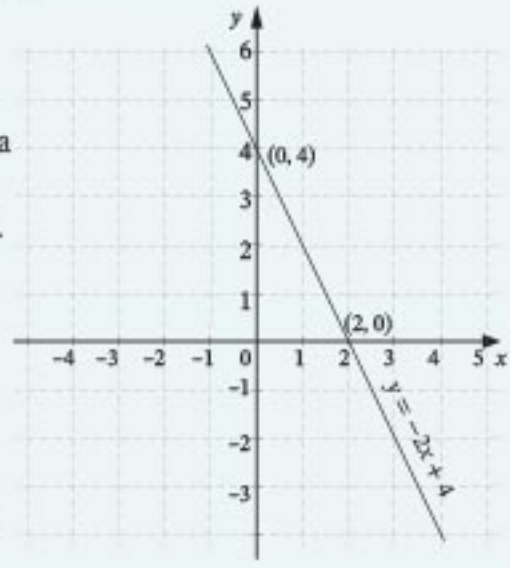
в) Нацртај го графикот на линеарната функција.

а) **Пресечната точка на графикот на линеарна функција со y – оската** е точка од графикот на линеарна функција во која x – координатата е еднаква на 0.
За $x = 0$, пресметуваме дека $y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$.
Според тоа, точката (0, 4) е пресечната точка на графикот со y – оската.
Пресечната точка на графикот на линеарна функција со x – оската е точка од графикот на линеарна функција за која y – координатата е еднаква на 0.
За $y = 0$, со решавање на равенката $-2x + 4 = 0$, добиваме $x = 2$.
Според тоа, точката (2, 0) е пресечната точка на графикот со x – оската.

б) **Нула на линеарна функција** ја нарекуваме вредноста на променливата x за која вредноста на функцијата е еднаква на нула 0.
Според тоа, нула на дадената функција е $x = 2$.

в) Графикот на дадената линеарна функција минува низ точките (0, 4) и (2, 0) (црт. 1).

x	0	2
y	4	0



црт. 1

Задача 1

Дадена е линеарната функција $y = 10 - 5x$.

а) Најди ги координатите на пресечните точки на линеарната функција со координатните оски.

б) Најди ја нулата на линеарната функција. в) Нацртај го графикот на линеарната функција.

Запишување на линеарна функција зададена со нејзиниот график

За да ја запишеме линеарната функција според даден график

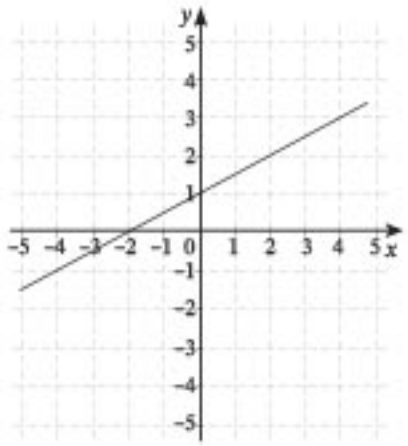
$$y = kx + n,$$

потребно е да ги најдеме вредностите на коефициентот на правец k и слободниот член n. Ќе откриеме два начини како да ја дознаеме нивната вредност од графикот на функцијата.

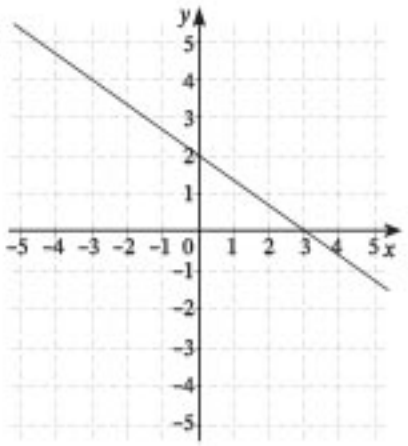
Пример 2

Запиши ја линеарната функција $y = kx + n$ зададена со графикот на цртеж 2:

а)



б)



црт. 2

Да го објасниме првиот начин за наоѓање на коефициентот и слободниот член.

а) **Прв чекор.** Забележуваме дека графикот на линеарната функција ја сече y – оската во точката (0,1), па слободниот член ќе биде $n = 1$. Ако во формулата $y = kx + n$ замениме $n = 1$, добиваме

$$y = kx + 1.$$

Втор чекор. Забележуваме дека графикот на линеарната функција ја сече x – оската во точката $(-2, 0)$. Нејзините координати ги заменуваме во формулата $y = kx + 1$. Оттука добиваме дека

$$0 = k \cdot (-2) + 1,\ -1 = -2k,\quad k = \frac{1}{2}.$$

Линеарната функција што одговара на дадениот график е $y = \frac{1}{2}x + 1$.

б) **Прв чекор.** Графикот на линеарната функција ја сече y – оската во точката (0,2), па слободниот член ќе биде $n = 2$. Ако во формулата $y = kx + n$ заменуваме $n = 2$, добиваме

$$y = kx + 2.$$

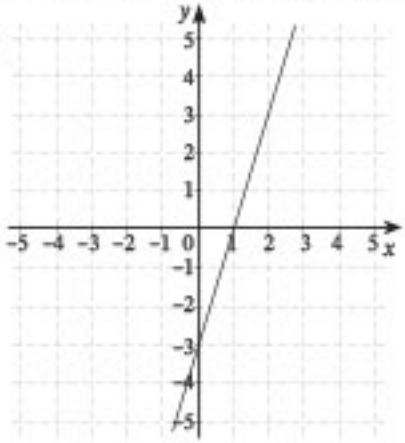
Втор чекор. Графикот на линеарната функција ја сече x – оската во точката (3, 0). Нејзините координати ги заменуваме во формулата $y = kx + 2$. Оттука добиваме дека

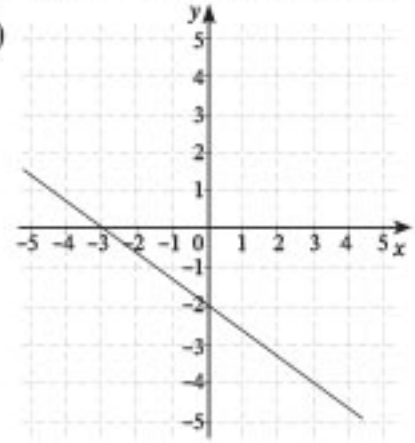
$$0 = k \cdot 3 + 2,\ -2 = 3k,\quad k = -\frac{2}{3}.$$

Според дадениот график ја добивме линеарната функција $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Задача 2

Запиши ја линеарната функција $y = kx + n$ зададена со графикот на цртеж 3:

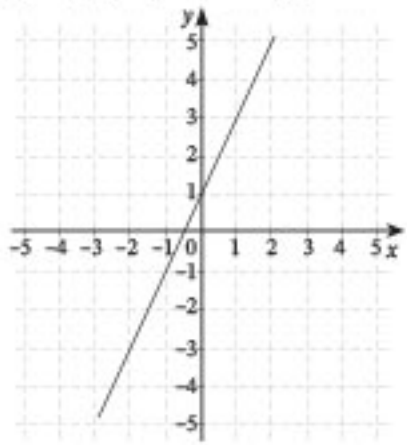
а) 

б) 

црт. 3

Пример 3

Запиши ја линеарната функција од графикот на цртеж 4.



црт. 4

Според графикот составуваме табела со вредности за четири последователни цели броја x.

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

+2 +2 +2

Согледуваме дека правилото за следен член на низата од вредности y е „додај 2“.
Затоа, во табелата додаваме редица со удвоени вредности на бројот x.

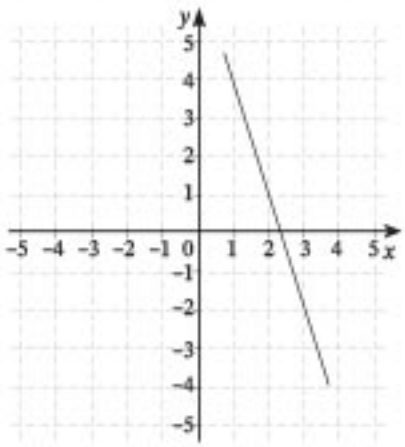
	x	1	2	3	4
·2	y	3	5	7	9
	$2x$	2	4	6	8

+1

Ако вредностите на $2x$ ги споредуваме со вредностите на y, согледуваме дека секоја вредност на $2x$ зголемена за 1 е еднаква на соодветната вредност на y.
Значи, линеарната функција е $y = 2x + 1$.

Пример 4

Запиши ја линеарната функција од графикот на цртеж 5.



црт. 5

Според графикот составуваме табела со вредности за четири последователни цели броја x.

x	1	2	3	4
y	4	1	-2	-5

-3 -3 -3

Согледуваме дека правилото за следен член на низата од вредности y е „додај -3“.
Затоа, во табелата додаваме редица со вредности кои се производ на -3 и бројот x.

	x	1	2	3	4
·(−3)	y	4	1	-2	-5
	$-3x$	-3	-6	-9	-12

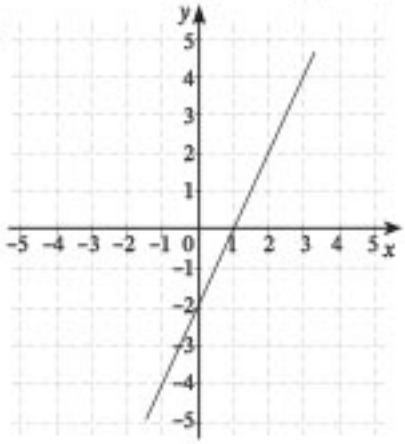
+7

Ако вредностите на $-3x$ ги споредуваме со вредностите на y, согледуваме дека секоја вредност на $-3x$ зголемена за 7 е еднаква на соодветната вредност на y.
Значи, линеарната функција е $y = -3x + 7$.

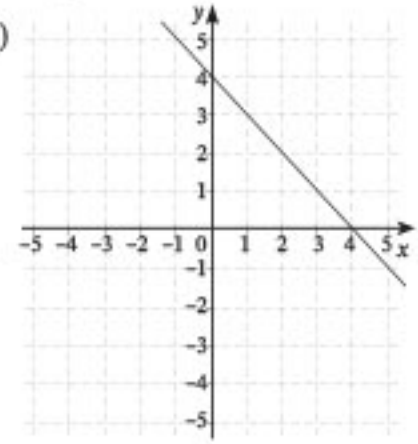
Задача 3

Запиши ги линеарните функции од графиците на цртеж 6.

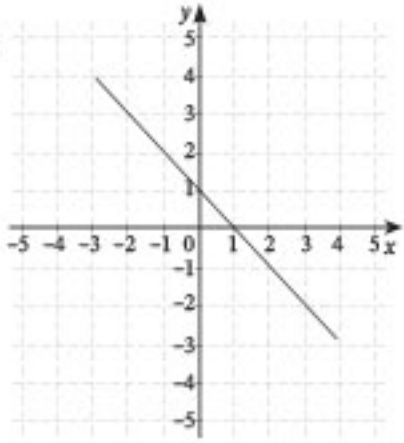
а)



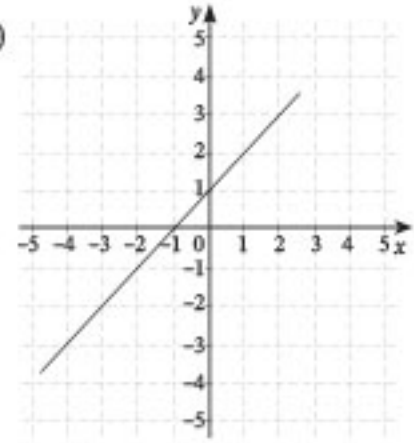
б)



в)



г)

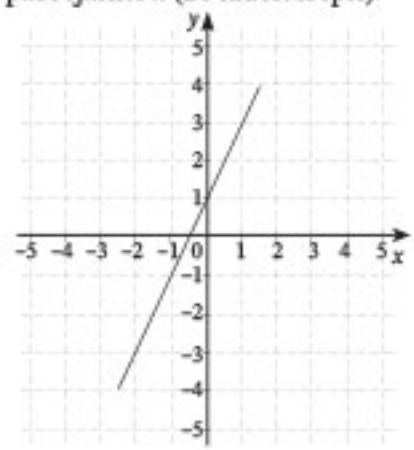


црт. 6

Пример 5

Марко вози велосипед по нагорна патека. Графикот ја прикажува зависноста на промената на надморската висина y (во метри), од поминатото растојание x (во километри).

а) Запиши ја линеарната функција $y = kx + n$ зададена со графикот на цртеж 7.
б) Објасни го значењето на коефициентот k и на слободниот член n.
в) На која надморска висина ќе биде Марко кога ќе помине 2 km.



црт. 7

а) Од графикот забележуваме дека правата ја сече y – оската во точката $(0, 1)$, што значи $n = 1$.

Освен тоа, графикот минува низ точката $(1, 3)$ од каде што наоѓаме дека

$3 = k \cdot 1 + 1,\ k = 2.$

Значи линеарната функција е $y = 2x + 1$.

б) Коефициентот $k = 2$ значи дека за секој изминат 1 km, надморската висина се зголемува за 2 m. Слободниот член $n = 1$ значи дека кога Марко е на почетокот на патеката, односно кога $x = 0$, надморска висина на патеката е 1 m.

в) Вредноста на функцијата во $x = 2$ изнесува $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ m. Тоа значи дека, кога Марко кога ќе помине 2 km, ќе биде на надморска висина од 5 m.

Забелешка. Иако графикот е прикажан за сите вредности на x, во контекст на задачата има смисла само делот каде што $x \geq 0$, бидејќи Марко не може да помине „негативно растојание".

Задача 4

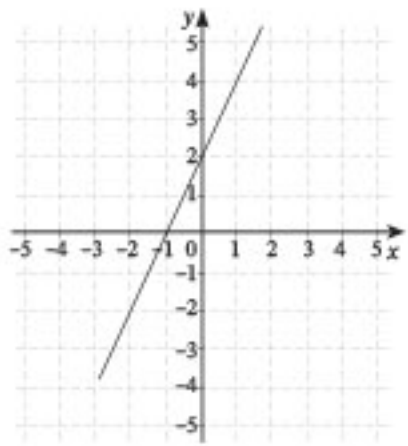
Петар се искачува по планинска патека. Графикот ја прикажува зависноста на надморската висина y (во метри) од изминатото растојание x (во километри).

а) Запиши ја линеарната функција $y = kx + n$ зададена со графикот на цртеж 8.

б) Објасни го значењето на коефициентот k и на слободниот член n.

в) На која надморска висина ќе биде Петар кога ќе помине 2,5 km.

г) По колку километри Петар ќе биде на висина од 14 m?



црт. 8

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

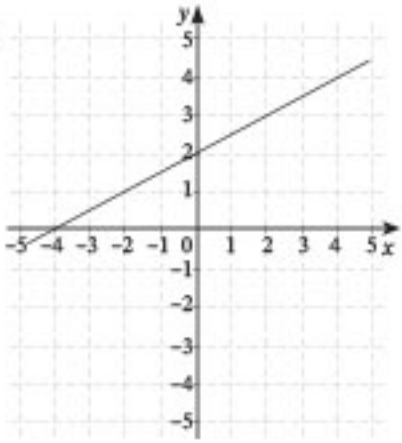
1. Најди ги пресечните точки со координатните оски на графикот на линеарната функција: а) $y = 2x + 5$, б) $y = -3x + 1$.

2. Најди ја нулата на линеарната функција: а) $y = x - 5$, б) $y = -x + 2$.

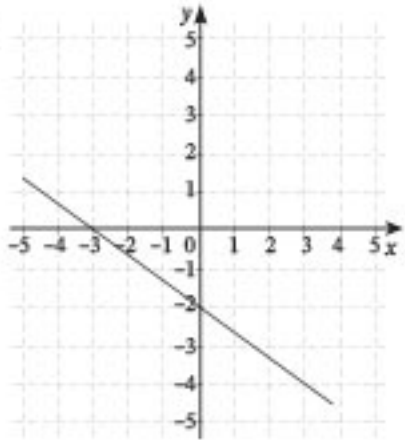
3. Нацртај го графикот на линеарната функција со помош на неговите пресечни точки со координатните оски: а) $y = -2x$, б) $y = -2x + \frac{1}{2}$, в) $y = \frac{3}{5}x - 3$.

4. Запиши ја линеарната функција $y = kx + n$ зададена со графикот на цртеж 9.

а)



б)



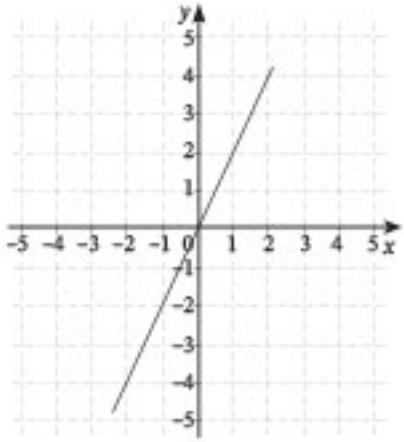
црт. 9

5. Пресечните точки на графикот на линеарна функција со координатните оски се:
а) (3, 0) и (0, 4), б) (−4, 0) и (0, 2).
Нацртај ја линеарната функцијата и запиши ја нејзината формула.

6. Нацртај ја линеарната функција со нула $x = 2$, која со x–оската зафаќа агол од 45°. Запиши ја формулата на функцијата од нејзиниот график.

7. Нацртај ја линеарната функција со нула во точката $x = -1$, која со x–оската зафаќа агол од 135°. Запиши ја формулата на функцијата од нејзиниот график.

8. Јулија купува млеко од локалната продавница. Цената на млекото y (во денари) зависи од количеството млеко (во литри) што ќе го купи.
а) Запиши ја линеарната функција $y = kx + n$ според графикот на цртеж 10.
б) Објасни го значењето на коефициентот k и на слободниот член n.
в) Колку ќе плати Јулија ако купи 3 литри млеко?



црт. 10

Истражување

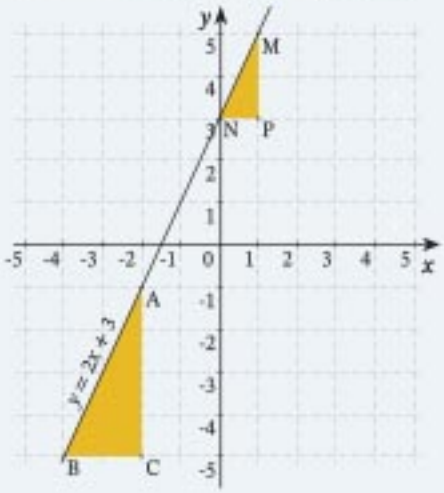
На цртеж 11 е прикажан графикот на линеарната функција $y = 2x + 3$. На правата се означени две произволни точки A и B, а потоа и точка C, така што ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето C.

а) Според графикот пресметај го количникот од должината на катетата AC со должината на катетата BC.

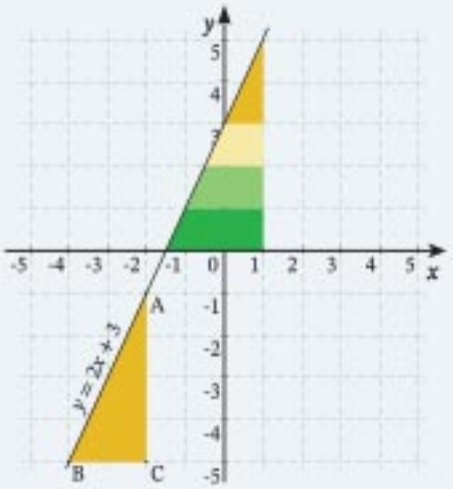
б) На ист начин, пресметај го количникот од должината на катетата MP со должината на катетата NP на триаголникот MNP ?

в) За секој пар произволни точки од правата, со повлекување прави кои се паралелни на оските низ двете точки, добиваме правоаголни триаголници (црт. 12). Пресметај колку изнесува количникот на катетата паралелна со y оската со катетата паралелна со x оската кај тие триаголници. Спореди го со коефициентот на дадената линеарна функција. Што заклучуваш?

г) Како ќе ти помогне заклучокот во постапката за запишување на линеарна функција $y = kx + n$ според даден график?



црт. 11



црт. 12

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Сведи го мономот во нормален вид:
а) xy^3x^2y, б) $6xy(-2x^4y)$, в) $-4xy^2(-5xy)$, г) $xyxyy4xy$.
Дали меѓу мономите има слични?

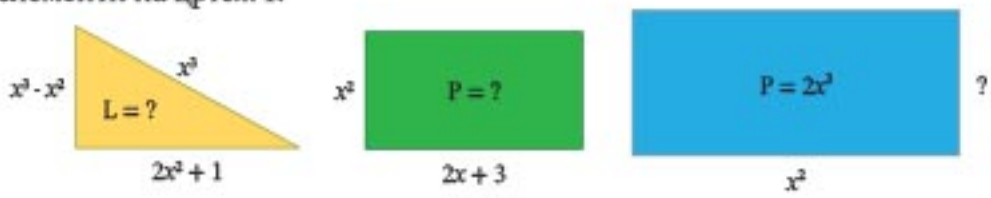
2. Од кој степен е мономот: а) x^3y^4, б) xy, в) $5x^2y^3z$, г) 3 ?

3. Од збирот на мономите $-a^2b$ и $3a^2b$ одземи ја нивната разлика.

4. Најди го производот на мономите: а) $4x^3 \cdot x^4 \cdot 2x^5$, б) $a^2b \cdot (-2a^3b^2) \cdot 7ab^3$.

5. Најди го количникот на мономите: а) $5x^6y^3 : (-20x^2y^2)$, б) $27a^4b : 3a^3b$.

6. Запиши алгебарски израз со кој ќе ги изразиш бараните величини преку дадените елементи на цртеж 1:



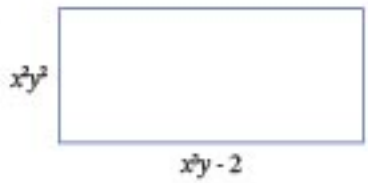
црт. 1

7. Запиши алгебарски израз за плоштината на правоаголникот на цртеж 2:

а)



б)



црт. 2

8. Запиши ги во нормален вид полиномот, а потоа одреди го неговиот степен:
а) $3xy + x - 5xy + 1$, б) $7ab^2 - 4ab + 5ab + ab^2$,
в) $x^2 - (2x)^3 + xxx - x^2$, г) $2xy^3 + 5(xy)^2z - (3xy)^2z + 8xyy^2$.

9. Дадени се полиномите $A = 6x^3 - 5x + 1$, $B = x^3 + 3x - 2$ и $C = x + 3$. Најди ги полиномите:
а) $A + B + C$, б) $A - B$, в) $C + B - A$, г) $-A + B - C$.

10. Запиши ги во нормален вид полиномите: а) $\frac{x}{4} + \frac{2x}{3} - \frac{5y}{6} + \frac{4x}{3}$, б) $\frac{2x}{7} + \frac{3y}{8} - \frac{3x}{2} + 2x$.

11. Два автомобили се движат во иста насока. Брзината на првиот автомобил во зависност од времето t е дадена со формулата $v_1 = 2{,}5t^2 + 0{,}5t + 10$, а на вториот со формулата $v_2 = 1{,}5t^2 + 0{,}8t + 9{,}5$. Запиши алгебарски израз што ја претставува разликата на нивните брзини во зависност од времето t и упрости го.

12. Изврши ги назначените операции:
а) $5x^2 + 2x(4x - 1)$,
б) $x^2(3x^3 - 2x) - 4(x^3 + 1)$,
в) $(24y^6 + 18y^4) : (-6y^2) + 21y^5 : (-7y^3)$,
г) $(5x^3 - x^2y) : x^2 + (30xy - 25y^2) : (-5y)$.

13. Ако $x = 2$, $y = -3$, $z = 4$ пресметај ја вредноста на изразот:
а) $3(2x - y^2) + 4(yz + 1)$,
б) $2(-x^3 + 1) - 3yz$,
в) $5(2x^2 - 3y) + 6x + 3(x - 2y^3) - 3xy$,
г) $2(xy^2 - 4) + 3x^2y + 7(x + y) - 5xy$.

14. Нина продава колачиња. Во понеделникот, таа продала 18. Во вторникот продала 22 колачиња, во средата продала 26 колачиња итн.
а) Колку колачиња продала во саботата?
б) Колку вкупно колачиња продала за една седмица, ако се знае дека Нина не работи во недела?

15. Дадена е низата со општ член $a_n = 7n + 1$. Најди ги:
а) првите 3 члена, б) членовите со реден број 300 и 458.

16. Определи го општиот член на низата:
а) 12, 15, 18, ..., б) 5, 11, 17, ..., в) 28, 24, 20, ..., г) 14, 9, 4, ...

17. Најди го општиот член на низата претставена со шемата на цртеж 3.



црт. 3

18. Реши ја равенката: а) $x-\frac{2}{5}=\frac{x}{10}+\frac{1}{2}$, б) $x-\frac{x}{4}-3=\frac{x}{6}-\frac{x}{3}+2$.

19. Реши ја равенката: а) $\frac{2}{3}(x-1)+4=\frac{x}{6}$, б) $\frac{1}{8}(2x+3)-\frac{1}{2}(x-1)=\frac{3}{4}$.

20. Реши ја равенката: а) $0,75x-0,25-\frac{2x}{3}=\frac{1}{3}-4x$, б) $1,25x-0,25-1,5x=x-1,5$.

21. Вредноста на половина од износот што го има Марија, намален за 2500 денари, е ист со 1500 денари намалено за третина од неговиот износ. Колку денари има Марија?

22. Најди ја помалата страна на правоаголникот ако таа е $\frac{1}{6}$ од поголемата и $\frac{1}{14}$ од периметарот.

23. Нацртај го графикот на линеарната функција: а) $y = 3x - 5$, б) $y = -x + 3$, в) $y = \frac{1}{3}x$.

24. Најди ја нулата на линеарната функција: а) $y = -x - 4$, б) $y = \frac{x}{4} + 2$.

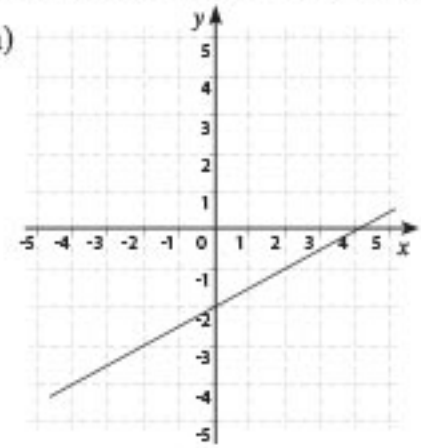
25. Дадени се линеарните функции:
$y = -x + 6$, $y = 7x + 26$, $y = -46$, $y = -35x + 4$, $y = 9x$, $y = x + 1$,
$y = -x + 23$, $y = 54x + 43$, $y = -397x$, $y = 200$, $y = x + 100$.
Запиши ги сите:
а) растечки функции. Која од нив најбрзо расте? б) опаѓачки функции. Која од нив најбрзо опаѓа?

26. Запиши ја линеарната функција чијшто график е паралелен на графикот на линеарната функција $y = 2x + 1$ и се сече со графикот на линеарната функција $y = x + 3$ на y – оската.

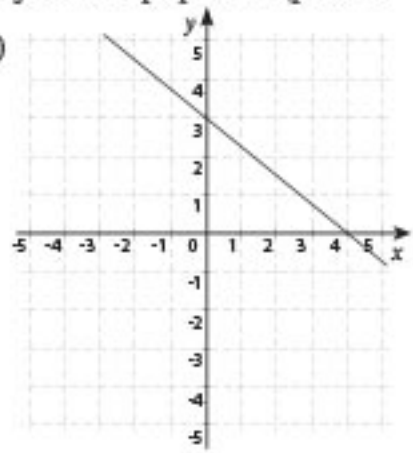
27. Нацртај го графикот на линеарната функција $y = -x + 2$, а потоа одговори на следните барања:
б) Колку е коефициентот на правец? б) Во која точка нејзиниот график ја сече y – оската?
в) Колку е нулата на функцијата? г) Опиши го текот на функцијата,
д) Најди ја вредноста на независно променливата, ако вредноста на функцијата е 5,
ѓ) Најди ја вредноста на функција, ако независно променливата прима вредност –2.

28. Запиши ја линеарната функција зададена со нејзиниот график на цртеж 4:

а)



б)



црт. 4

29. Во компанијата А за изнајмување автомобили, дневниот наем изнесува 500 денари, а дополнително се плаќаат 40 денари по поминат километар. Во компанијата Б, дневниот наем изнесува 400 денари, а дополнително се плаќаат 50 денари по поминат километар.

а) Објасни во која компанија изнајмувањето е поповолно во зависност од бројот на изминати километри.

б) Во која компанија изнајмувањето е поповолно за пат долг 300 km?

в) Колку ќе се заштеди ако за пат од 500 km се избере поповолната понуда?

30. Соња сака да ги размножи нарцисите во својата градина. Од секој корен ќе ги извади новоформираните 5 луковици, а ќе ја задржи и старата билка.

а) Запиши функција за зависноста на бројот на нарциси по размножувањето y од бројот на нарциси пред размножувањето x.

б) Колку билки ќе има Соња по размножувањето на 7 нарциси?

31. На цртеж 5 е даден планот на еден стан, на кој сите должини се изразени во метри.



црт. 5

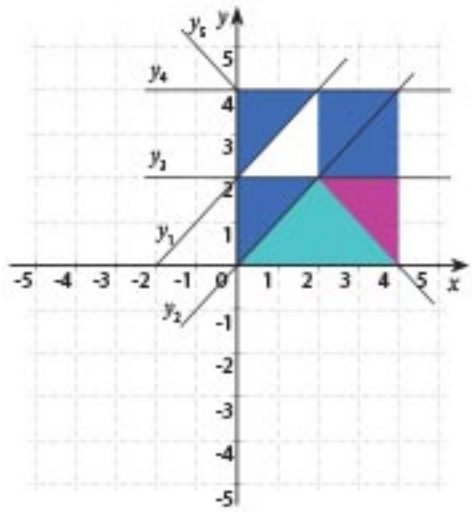
а) Според дадениот план состави израз во нормален вид за:
- Плоштината на секоја од просториите,
- Плоштината на целиот стан,
- Периметарот на секоја од просториите,

б) Колку вкупно квадратни метри плочки се потребни за поплочување на подот во терасата, тоалетот и ходникот ако $x = 0{,}4$?

в) Колку метри подни лајсни се потребни за подот во спалната соба ако отворите за врата се по 0,8?

г) Колку квадратни метри паркет е потребно за подот во дневната и спалната соба ако $x = 0{,}4$?

32. Запиши ги формулите на линеарните функции: y_1, y_2, y_3, y_4 и y_5, кои се употребени за креирање на сликата на цртеж 6.



црт. 6

33. Во ист координатен систем нацртај ги графиците на линеарните функции:

$y = 2x$, $y = -2x$, $y = x - 8$, $y = -x - 8$, $y = 2x - 8$, $y = -\frac{x}{2} - 2$ и $y = -\frac{x}{2} + 6$.

Креирај уметнички цртеж, боејќи ги во разни бои деловите од рамнината што се заградени со нацртаните графици.

Тема 4:

МЕРЕЊЕ

Резултати од учење:

При изучувањето на оваа тема ќе можеш да:

- користиш мерни единици за време во решавање на проблеми со пресметување или графички.
- избираш соодветни мерни единици за мерење, проценување, пресметување и решавање проблеми во различен контекст, вклучувајќи единици за должина, плоштина и волумен.

1. МЕРНИ ЕДИНИЦИ ЗА ВРЕМЕ

Активност

Мехмед трча секое утро по 30 минути. Колку часа неделно трча Мехмед?

Една од најчесто користените мерки за мерење на времето е денот. Тоа е времето што е потребно да се заврти Земјата еднаш околу својата оска.

Помали единици мерки за време од денот се: **час (h)**, **минута (min)** и **секунда (s)**.
Поголеми единици мерки за време од денот се: **недела** (седмица), **месец**, **година**.
Седмица е време што содржи 7 дена. Месец е време што содржи 28, 29, 30 или 31 ден, но при пресметување земаме дека **месецот има 30 дена**.

Годината е времето што е потребно Земјата да се заврти еднаш околу Сонцето и изнесува 365 дена и 6 h. За полесно сметање востановено е три години, една по друга, да имаат по 365 дена, а секоја четврта да има 366 дена. Годините што имаат по 365 дена ги викаме **прости**, а годината што има 366 дена ја викаме **престапна**. Во престапната година месецот февруари добива 29 дена, додека во простите години тој има по 28 дена. При пресметување земаме дека **годината има 365 дена**.

Се употребуваат и поголеми единици мерки од годината, а тоа се: **деценија**, што има 10 години, **век** или **столетие** што има 100 години, како и **милениум** што има 1000 години.
Годината има 12 месеци или 52 недели и 1 ден, а во престапните години 52 недели и 2 дена.
При пресметување земаме дека **годината има 52 недели**.

Времето од една **секунда** е основна единица мерка за време.

Потсети се, меѓу мерните единици за време постои следниот однос:

мерна единица	врска со помали мерни единици
секунда (s)	основна мерна единица
минута (min)	1 min = 60 s
час (h)	1 h = 60 min = 3600 s
Ден	1 ден = 24 h = 1440 min = 86400 s
седмица	1 седмица = 7 дена = 168 h = 10080 min = 604800 s
месец	1 месец се зема 30 дена во пресметувања
година	1 година = 12 месеци = 365 дена
деценија	1 деценија = 10 години = 120 месеци = 3650 дена
Век	1 век = 100 години
милениум	1 милениум = 10 века = 1000 години

Постојат и помали мерни единици од секундата, како десетинка (десетти дел од секунда), стотинка (стори дел од секунда) и илјадинка (илјадити дел од секунда). Тие најчесто се применуваат во спортските натпреварувања.

Пример 1

Колку часови има во: а) 5 дена, б) 570 min, в) 1 месец?

а) Еден ден има 24 часа, па 5 дена ќе имаат $5 \cdot 24\ \text{h} = 120\ \text{h}$.

б) $570 = 9 \cdot 60 + 30 = 9\ \text{h}\ 30\ \text{min}$.

в) Сметаме дека 1 месец има 30 дена, па 1 месец $= 30 \cdot 24\ \text{h} = 720\ \text{h}$.

Пример 2

Колку минути има во: а) 1 ден и 3 часа, б) 2700 s?

а) 1 ден и 3 часа се $(24 + 3)\ \text{h} = 27\ \text{h} = 27 \cdot 60\ \text{min} = 1620\ \text{min}$, б) $2700 : 60 = 45\ \text{min}$.

Задача 1

Колку минути има во: а) 2 дена и 2 часа, б) 3180 s?

Пример 3

Колку секунди има во: а) 5 h 14 min, б) 3,5 часа?

а) $5\ \text{h}\ 14\ \text{min} = (5 \cdot 60 + 14)\ \text{min} = 314\ \text{min} = 314 \cdot 60\ \text{s} = 18840\ \text{s}$,

б) $3{,}5\ \text{h} = 3{,}5 \cdot 60\ \text{min} = 210\ \text{min} = 210 \cdot 60\ \text{s} = 12600\ \text{s}$.

Задача 2

Колку секунди има во: а) 3 h 27 min, б) 3,2 часа?

Пример 4

Колку часови, минути и секунди има во 9256 s?

$1\ \text{min} = 60\ \text{s}$ и $1\ \text{h} = 60\ \text{min}$

Добиваме $9256\ \text{s} = 154\ \text{min}\ 16\ \text{s} = 2\ \text{h}\ 34\ \text{min}\ 16\ \text{s}$.

Заклучуваме дека $9256\ \text{s} = 2\ \text{h}\ 34\ \text{min}\ 16\ \text{s}$.

Задача 3

Колку часови, минути и секунди има во: а) 8410 s, б) 12568 s?

Пример 5

Сара има 14 години и 7 месеци. Мајка ѝ е постара од неа 374 месеци. Колку години има мајката на Сара?

Разликата во возраста 374 месеци ќе ја претвориме во години и месеци со делење:

$$\begin{array}{r} 374 : 12 = 31 \\ -\underline{36} \\ 14 \\ -\underline{12} \\ 2 \end{array}$$

Според тоа, мајката е постара од Сара 31 година и 2 месеци.
Мајката на Сара има $14 + 31 = 45$ години и $7 + 2 = 9$ месеци.

Задача 4

Светскиот рекорд во маратон за жени, поставен во 1963 година за САД, изнесувал 3 часа 37 минути и 7 секунди. Актуелниот светски рекорд, поставен во 2024 за Кенија е подобрен за 1 час 27 минути и 13 секунди.
Колку изнесува новиот светски рекорд во: а) часови, минути и секунди, б) секунди?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Колку секунди има во: а) 15 h 23 min, б) 6 h 15 min 35 s?
2. Колку часа и минути има во: а) 523 min, б) 1000 min?
3. Претвори во години: а) 3 века и 8 децении, б) 1 милениум, 6 века и 4 децении.
4. Што е поголемо?
   а) 6 месеци или 3800 часа,
   б) 3 години и 2 месеци или 1500 дена,
   в) 7 часа и 43 минути или 450 минути,
   г) 5 часа 15 минути и 35 секунди или 200 000 секунди?
5. Подреди ги по големина броевите, почнувајќи од најмалиот: 730 дена, 2 години, 90 недели и 32 месеци.
6. Ника има 12 години 3 месеци и 5 дена. Колку години, месеци и денови ќе има Ника по 85 месеци?
7. Ана и Ема заедно имаат 358 месеци. Ана има 15 години и 4 месеци. Колку години има Ема?
8. На ТВ-програмата филмскиот маратон почнал во 9 : 15 часот попладне, а завршил наредниот ден во 6 : 45 часот претпладне. Пресметај колку минути траел маратонот.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Истражи на интернет колку време трае годината, месецот и денот на некои други небески тела. Потоа, реши ги задачите. За пресметките користи калкулатор.

а) Ако од Марс тргнеш на патување кон Земјата, со летало кое се движи побрзо од земјините летала, ќе стигнеш на Земјата за 2400 часа 180 минути и 360 секунди (мерено во земјино време). Претвори го ова време во денови, часови и минути.

б) Лина има 13 години 5 месеци и 12 дена, мерено во земјино време. Колку години, месеци и денови има Лина пресметано во марсовско време?

в) Марко има 14 години 8 месеци и 22 дена мерено во земјено време. Колку години, месеци и денови има Марко мерено во сатурновско време?

2. ГРАФИЦИ ВО КОНТЕКСТ НА ВРЕМЕ

График пат-време

Активност

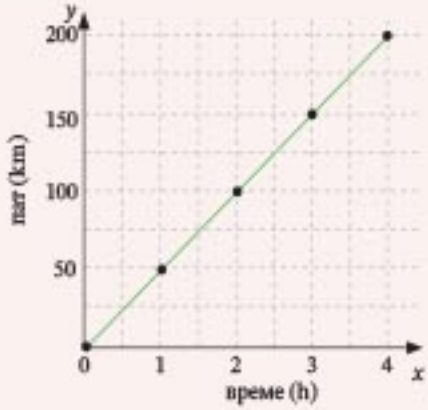
На графикот на цртеж 1 е прикажано патување на еден автомобил.

а) За колку време автомобилот поминал 100 километри?

б) Колку километри поминал автомобилот за време од 3 часа?

в) Колку километри поминал автомобилот за време од 1 час?

г) Со која брзина се движи автомобилот?



црт. 1

Со графикот пат-време се претставува зависноста на патот што го поминал еден објект од изминатото време. Графикот го цртаме во координатен систем така што времето го претставуваме на x-оската, а растојанието (патот) на y-оската.

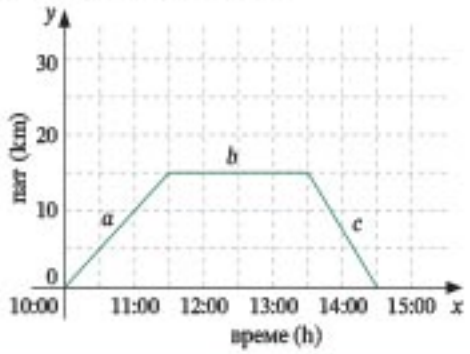
Графикот пат-време ни помага да направиме анализа на движењата на објектите и луѓето.
Имено, од графикот можеме да прочитаме колку далеку стигнал некој објект за некое време, дали објектот мирува, се движи, забрзува или забавува, а можеме да ја најдеме и брзината со која се движи објектот во одредена етапа.

Скенирај го кодот и разгледај го графикот на движење.

Пример 1

Графикот на цртеж 2 го претставува патувањето на Ема со велосипед на состанок и назад.

а) Колку време патувала Ема од дома до местото на состанокот?
б) Колку време таа се задржала на состанок?
в) Кога Ема возела побрзо, на одење или на враќање?
г) Со која брзина се движела во секоја од етапите?



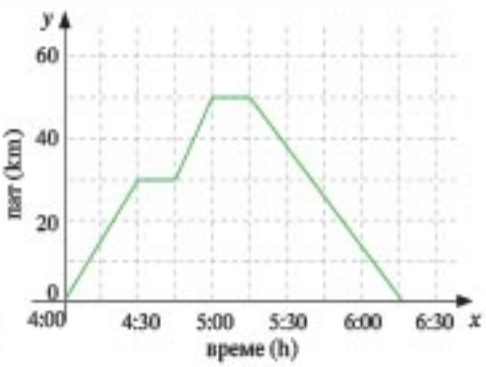
црт. 2

а) Ема тргнала во 10:00 часот, а стигнала во 11:30, што значи патувала час и половина.
б) Од графикот гледаме дека од 11:30 до 13:30 Ема се наоѓа на исто растојание од дома. Значи, останала на состанокот 2 часа.
в) Патот на одење (етапа *a*) Ема го поминала за 1,5 час, а истиот тој пат на враќање (етапа *b*) го поминала за 1 час, значи побрзо возела на враќање.
г) Во етапата *a* поминала 15 km за 1,5 час, што значи брзината е 15 : 1,5 = 10 km/h. Во етапата *b* брзината е 0 km/h (мирување), а во етапата *c* за 1 час поминала 15 km, па брзината била 15 km/h.

Задача 1

На графикот на цртеж 3 е претставено патувањето на такси возило кое го зема патникот во 4:00, го носи на аеродром во 5:00 часот и се враќа назад.

а) Колку вкупно километри пат поминало возилото?
б) Колку време возилото поминало во мирување?



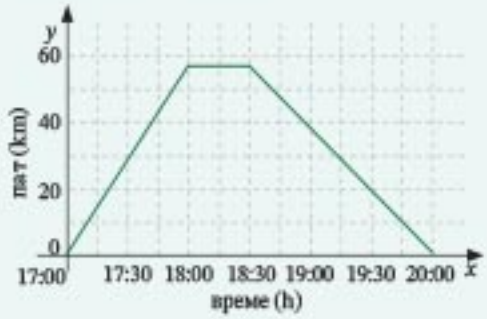
црт. 3

в) Колку време возилото поминало во возење од почетната точка до аеродромот?
г) Во која етапа од патувањето возилото возело најбрзо?

Пример 2

Марко тргнал од дома во 17 часот. Возел 1 час и притоа поминал 58 километри до соседниот град. Таму останал половина час. Потоа тргнал назад и патувал 1,5 час до дома. Нацртај график кој го претставува патувањето на Марко.

На цртеж 4 е прикажан графикот на патувањето на Марко.



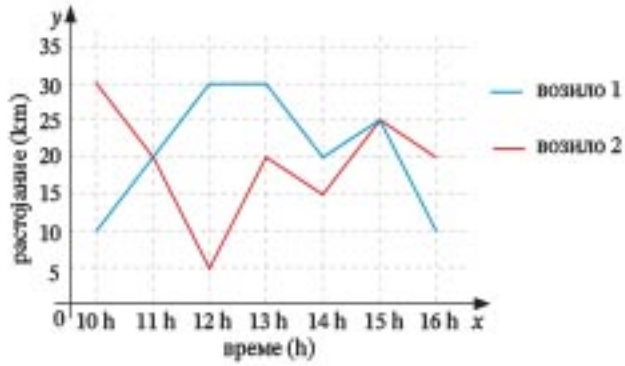
црт. 4

Пример 3

На графикот на цртеж 5 е прикажано движењето на две такси-возила во период на шестчасовна работа преку растојанието на возилата од такси-станицата.

а) Колку пати во период на шесте часа тие биле на исто растојание од станицата? Во колку часот?

б) Кое возило поминало повеќе пат во период на шесте часа?



црт. 5

а) Од графикот гледаме дека линиите на движење на возилата се сечат на две места, што значи во 11 часот и во 15 часот тие ќе бидат исто оддалечени од станицата.

б) Возилото 1 поминало 20 km + 10 km + 5 km + 15 km = 50 km.
Возилото 2 поминало 10 km + 15 km + 15 km + 5 km + 10 km + 5 km = 60 km.

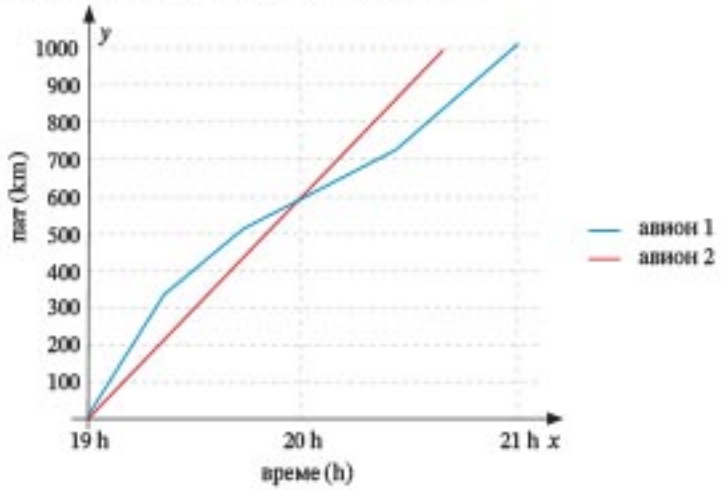
Задача 2

На графикот на цртеж 6 е прикажана патеката на две авионски линии кои тргнуваат истовремено.

а) Колку пати во периодот на летот тие биле на исто растојание од аеродромот? Во колку часот?

б) Кој од авионите стигнал порано и за колку време?

в) Кој авион поминал повеќе пат во период на својот лет?



црт. 6

Други графици во контекст на време

Активност

Со тек на времето се зголемува бројот на жители на планетата. Тој раст е прикажан на цртеж 7.

а) За колку жители е зголемена светската популација од 1800 до 2000 година?

б) За колку жители е зголемена светската популација од 1800 до 1950 година?

в) Во кој период е забележен најголем пораст на населението и за колку?



црт. 7

Многу секојдневни активности, како и природни и општествени појави, се одвиваат во период на разни временски интервали.

Скенирај го кодот и разгледај ги графиците на движење.

Притоа, величините кои ги карактеризираат активностите и појавите се менуваат со текот на времето. Тие промени ги опишуваме со креирање график на зависност на промената на величината од поминатото време.

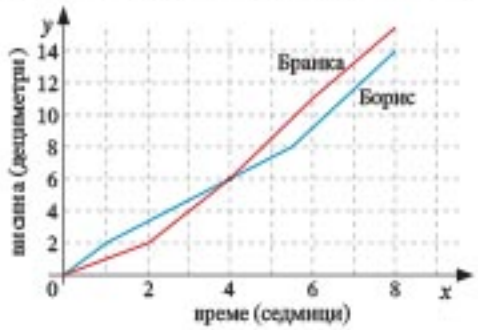
Пример 4

Бранка и Борис садат домати во нивниот двор, секој во свој посебен дел од градината. Бранка ги полева растенијата 3 до 5 пати неделно, а Борис смета дека треба да се полеваат само 1 до 2 пати неделно. Секој од нив ги мери висините на своите растенија. Дијаграмот за растот на нивните домати е даден на цртеж 8.

а) Кој е во право во врска со полевањето? Како заклучуваш?

б) По колку време доматите на Бранка и доматите на Борис имале иста висина?

в) Во кој временски интервал биле поголеми доматите на Бранка, а во кој доматите на Борис?



црт. 8

а) Во право е Бранка. Нејзините растенија постигнале поголема висина.

б) Забележуваме дека графиците се сечат по 4 седмици. Значи, по 4 седмици растенијата на Борис и на Бранка имале иста висина.

в) Доматите на Борис биле повисоки во првите 4 седмици, а доматите на Бранка во вторите 4 седмици.

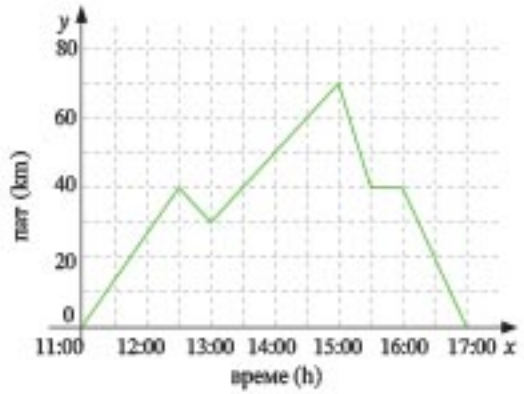
Задача 3

Во табелата се дадени просечните месечни температури во Берово, Прилеп и Скопје во период на една година. Нацртај график што ја претставува промената на температурата во првите 6 месеци од годината.

	јануари	февруари	март	април	мај	јуни
Берово	2	1	6	8	12	22
Прилеп	5	4	15	20	22	28
Скопје	8	4	18	23	25	29

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. На графикот на цртеж 9 е претставена обиколка на знаменитости со еден туристички автобус.



црт. 9

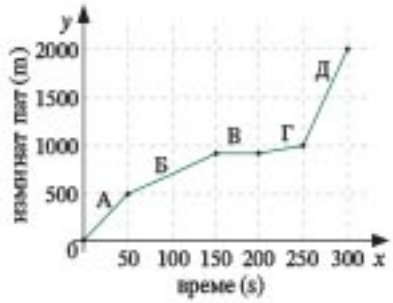
а) Колку вкупно километри поминал автобусот?

б) Колку траела паузата?

в) Од колку до колку часот автобусот возел најбрзо?

г) Со која брзина возел од 13 до 15 часот?

2. Еден велосипедист се искачува на рид, а потоа се спушта. Неговото движење се одвива во 5 етапи: А – возење по рамен пат, Б – возење по угорница, В – одмор, Г – туркање на велосипедот и Д – спуштање, прикажани со графикот на цртеж 10:



црт. 10

а) Колку минути траело возењето?

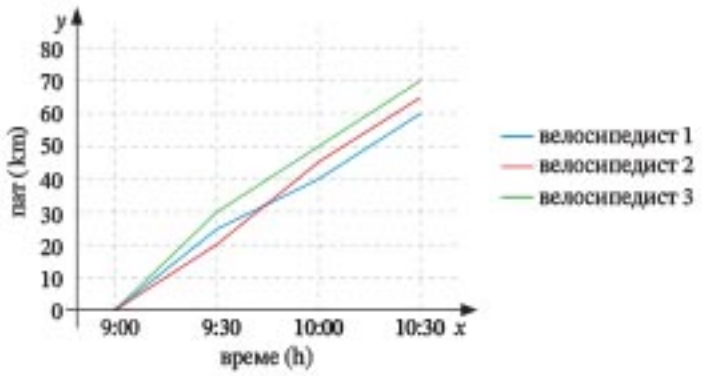
б) Колку време велосипедистот го туркал велосипедот?

в) Колку пат поминал по 250 минути?

г) Во која етапа поминал најмногу пат?

д) Во која етапа велосипедистот се движел најбрзо?

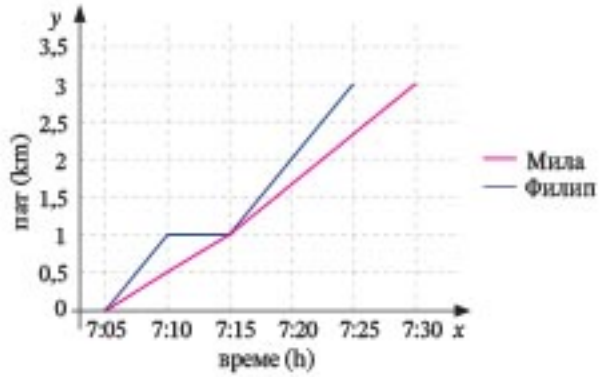
3. На графикот на цртеж 11 е прикажан патот на три велосипедисти кои тренирале на ридска патека.



црт. 11

а) Кој од велосипедистите возел најбрзо во првите 30 минути?
б) Колкав пат поминал секој од нив?
в) Кој возел најбавно од 9:30 до 10:00 часот?

4. На графикот на цртеж 12 се прикажани патувањата на Мила и Филип од нивниот дом до училиштето.
На x-оската е времето (од 7:05 до 7:30), а на y-оската е растојанието од домот (во километри).
Мила оди пеш, а Филип со велосипед и патем застанува во продавница, па продолжува.



црт. 12

а) Кој од нив пристигнал прв во училиштето?
б) Колку време ѝ било потребно на Мила за да стигне во училиште?
в) Во колку часот Филип застанал во продавницата и колку време се задржал таму?

5. Елена тргнала од дома во 8 часот. Возела 30 минути до своето работно место што е оддалечено 15 km. Таму останала до 13:30 часот. Во 13:45 стигнала дома. Нацртај график што го претставува патувањето на Елена на работа.

6. Марина и Ирина отишле на зимски одмор со своите семејства. Сакале да подготват проект за во училиште, па се договориле да ги запишуваат податоците за растојанието на кое се наоѓаат од почетната точка за одредено време. Девојчињата ги собрале следните податоци:

Марина

време (h)	1	2	3	4	5	6
пат (km)	100	180	180	290	380	470

Ирина

време (h)	1	2	3	4	5	6
пат (km)	80	150	230	230	320	400

Нацртај ги графиците на патување на двете девојчиња во ист координатен систем и одговори:
а) Во кој час семејството на Ирина направило пауза?
б) Чиј автомобил се движел побрзо во последниот час од патувањето?
в) Во која етапа од патувањето автомобилот на Марина се движел најбрзо?

7. Во табелата е даден бројот на продадени сендвичи и бројот на продадени сокови во една сендвичарница во периодот на една седмица. Нацртај дијаграм на зависноста на бројот на продадени сендвичи и сокови од времето.

ден	понеделник	вторник	среда	четврток	петок	сабота	недела
сендвичи	58	70	65	95	86	54	47
сокови	53	85	87	78	52	62	56

8. **Проектна задача**

Учениците од осмо одделение од едно училиште во Скопје ќе одат на еднодневна наставно-научна екскурзија во Штип. Планирано е да ги посетат: штипскиот Безистен, тврдината Исар, археолошкиот локалитет Баргала и музејот на град Штип. Притоа, треба да се испланира пауза за ручек. Направи временски план на патувањето и претстави го со график. Притоа:

1) Информирај се за времето на поаѓање и враќање;

2) Истражи податоци за оддалеченоста Скопје-Штип, како и за локацијата на местата што треба да се посетат и оддалеченоста меѓу нив;

3) Пресметај колку време ќе биде потребно за да се поминат растојанијата меѓу местата од планот;

4) Испланирај го редоследот на посети врз основа на истражените податоци за локација и оддалеченост на местата;

5) Направи табела со растојанијата од Скопје до местата што треба да се посетат и часот на пристигнување во секое од нив;

	поаѓање	Безистен	Исар	ручек	Баргала	музеј
време						
растојание						

6) Претстави ги со график податоците од табелата.

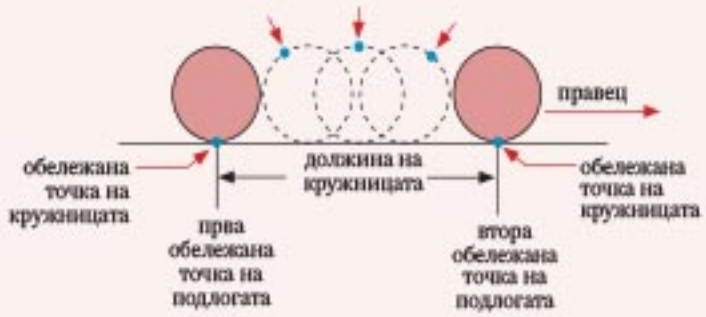
3. ДОЛЖИНА НА КРУЖНИЦА

Активност

За активноста ќе биде потребно: линијар, молив, предмети од секојдневниот живот со цилиндрична форма како лименка, паричка или чаша. За почеток внимателно измери го дијаметарот на кружницата од избраниот предмет, обележи една точка на таа кружница и на подлогата по која ќе го движиш. На крајот на едно цело завртување обележи ја втората точка на подлогата (како што е прикажано на цртеж 1).

Скенирај го кодот и согледај го периметарот на кружницата.

Растојанието од првата обележана точка на подлогата до втората обележана точка на подлогата е токму должината на кружницата. Повтори го експериментот со неколку различни кружни предмети и пополни ја табелата. Спореди ги резултатите со соучениците. Што забележуваш?



црт. 1

кружен предмет	должина на кружница	дијаметар на кружница	количник на должина со дијаметар
.			
.			
.			

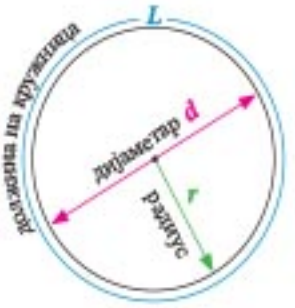
При изведувањето на активноста сигурно забележа дека количникот на должината на кружницата со дијаметарот на кружницата е приближно еднаков за секоја кружница. Количникот од должината на кружницата L и нејзиниот дијаметар d е ист број за секоја кружница и се означува со грчката буква π (се чита „пи“), односно $\frac{L}{d} = \pi$.

Должината на кружница е еднаква на производот од дијаметарот на кружницата и бројот π.

Според тоа, должината на кружница L се пресметува по формулите:

$$L = d\pi \text{ или } L = 2\pi r$$

каде што d е дијаметарот на кружницата и r е радиусот на кружницата (црт. 2).



црт. 2

Бројот π е бесконечен непериодичен децимален број и уште се нарекува Лудолфов број. На почеток научници, а подоцна и моќни компјутери, ги пресметувале неговите децимали, но за практична употреба се користи неговата приближна вредност $\pi \approx 3{,}14$ или $\pi = \frac{22}{7}$.

Ако кружницата ја разгледуваме како граница на круг, тогаш нејзината должина L се смета за **периметар на кругот**.

Пример 1

Пресметај ја должината на кружница, ако: а) $r = 10{,}5$ cm, б) $d = 0{,}8$ m.

а) $L = 2\pi r \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10{,}5 \text{ cm} = 3{,}14 \cdot 21 \text{ cm} = 65{,}94 \text{ cm}$, б) $L = \pi d \approx 3{,}14 \cdot 0{,}8 \text{ m} = 2{,}512 \text{ m}$.

Задача 1

Пресметај ја должината на кружницата, ако: а) $r = 2{,}3$ m, б) $d = 7\frac{2}{5}$ m.

Задача 2

Ана и Марко трчаат во паркот по кружна патека чиј радиус е 14 m.

а) Пресметај ја должината на патеката по која трчаат.

б) Колку метри вкупно ќе истрча секој од нив ако истрчаат 3 круга?

Активност

Како можеш од формулата:

а) $L = d\pi$ да го пресметаш дијаметарот на кружницата?

б) $L = 2\pi r$ да го пресметаш радиусот на кружницата?

Пример 2

Една челична лента долга 1 m е свиткана во кружница. Колкав е дијаметарот на кружницата?

Дијаметарот на кружницата изнесува $d = \frac{L}{\pi} \approx \frac{1\text{m}}{3{,}14} \approx 0{,}32$ m.

Пример 3

Пресметај го радиусот на круг со периметар $4{,}5\pi$ cm.

Радиусот на кругот изнесува $r = \frac{L}{2\pi} = \frac{4{,}5\,\text{cm} \cdot \cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = \frac{4{,}5\,\text{cm}}{2} = 2{,}25\,\text{cm}.$

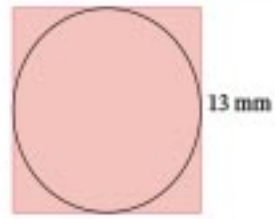
Задача 3

Во паркот се планира да се направи цветник во форма на круг. Должината на оградата што ќе го огради цветникот треба да биде 31,4 m. Колкав треба да биде радиусот на цветникот?

Пример 4

Мал украс за накит има форма на квадрат со страна $a = 13$ mm (црт. 3). Во квадратот треба да се стави жица во форма на кружница што ги допира страните на тој квадрат. Колку милиметри жица е потребно за да се изработи украсот?

црт. 3



Од условот во задачата за дијаметарот на кружницата наоѓаме дека $d = a = 13$ mm.
Ја пресметуваме должината на кружницата

$$L = d \cdot \pi \approx 13\,\text{mm} \cdot 3{,}14 = 40{,}82\,\text{mm}.$$

Според тоа, должината на жицата е 40,82 mm.

Задача 4

Околу квадратна цветна леа е посеана трева како на цртеж 4. Пресметај ја должината на заштитната ограда околу кругот, ако дијагоналата на квадратната леа е 2,5 m.

црт. 4



Задача 5

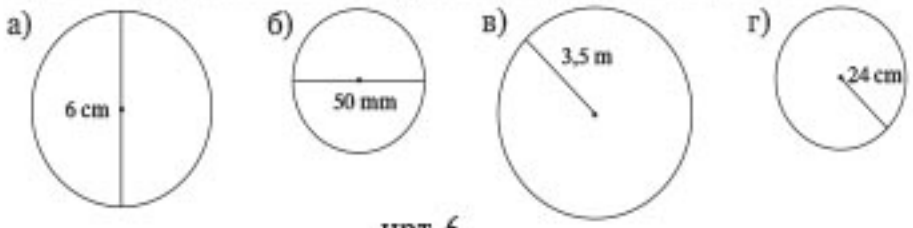
Димензиите на автомобилско тркало се дадени на цртеж 5. Заокружи го на најблискиот метар патот што ќе го помине тркалото, ако направи 15 завртувања?

црт. 5



ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај ја должината на кружниците дадени на цртеж 6.



црт. 6

2. Прецртај ја табелата во твојата тетратка и дополни ја со бараните величини за кружница:

r	5 cm	8 mm				
d			1 m	6 dm		
L					25,12 cm	3π dm

3. Учениците во лабораторија за природни науки прават сончев часовник. Тие сакаат да постават метална жица околу часовник со радиус 20 cm. Колку метри метална жица ќе им биде потребна?

4. Научници планираат да лансираат сателит кој ќе се движи околу Земјата по кружна орбита на висина 500 km над површината на Земјата. Радиусот на Земјата е приближно 6371 km.

а) Пресметај го радиусот на орбитата на сателитот.

б) Пресметај ја должината на орбитата по која ќе се движи сателитот.

5. Автомобилска гума има дијаметар 70 cm (црт. 7).

а) Пресметај го нејзиниот периметар.

б) Колку километри ќе помине, ако направи 20 000 полни завртувања?

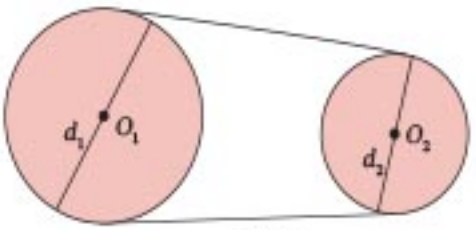
в) Колку пати ќе се заврти тркалото ако возилото измине пат од 45 km?



црт. 7

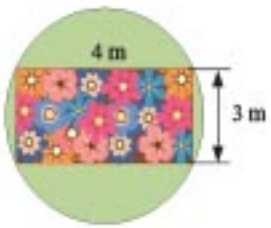
6. Новоизграден базен за училишни активности во форма на круг има периметар 94,2 m. Пресметај го дијаметарот на базенот.

7. Два запченици на една машина имаат дијаметри $d_1 = 60$ cm и $d_2 = 45$ cm и се поврзани со ремен (црт. 8). Поголемиот запченик е завртен од мотор така што прави 180 завртувања во 1 минута, а преку ремењето со вртењето на поголемиот се врти и помалиот запчаник. Колку завртувања во минута ќе направи помалиот запченик?



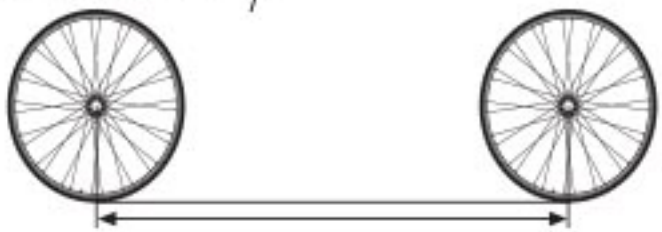
црт. 8

8. Тревник во форма на круг е поставен околу правоаголна цветна леа (црт. 9). Тревникот треба да биде ограден со 2 реда заштитна лента. Колкава е должината на лентата потребна за оградување на тревникот, ако страните на правоаголната цветна леа се 3 m и 4 m?



црт. 9

9. Две идентични тркала се поставени на права патека така што нивните центри се на растојание 9,31 m (црт. 10). Радиусот на секое тркало е 3,5 cm. Тркалата истовремено се придвижени едно кон друго и прават по 1 цело завртување за 1 секунда. По колку време ќе се судрат? Користи $\pi \approx \frac{22}{7}$.



црт. 10

Истражување

1. Направи леток за бројот π во кој ќе ставиш интересни факти од историјата на математиката за овој број и неговото значење.



слика 1

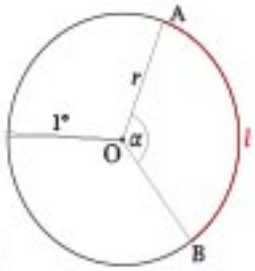
2. Мерно тркало (слика 1) е инструмент кој се користи за мерење растојанија. Тоа се состои од тркало, рачка и апарат што ги брои полните завртувања на тркалото.
Обезбедете мерно тркало со периметар на кругот 1 m. Пресметајте го радиусот на тркалото, а потоа пресметката проверете ја со мерење.
Искористете го мерното тркало за мерење на растојанија, на пример во училишниот двор, спортското игралиште или должината на оградата околу училиштето.
Колкава би била грешката во мерењето на километар, ако вашето мерно тркало има радиус кој е помал за: а) 1 cm, б) 1 mm, в) 0,1 mm?

4. ДОЛЖИНА НА КРУЖЕН ЛАК

Активност

Нацртај три аналогни часовници со броевите од 1 до 12 на кружница. Означи лак на кружницата што ја прикажува патеката којашто ја поминува врвот на малата стрелка на:
а) првиот часовник од 16 h до 22 h,
б) вториот часовник од 12 h до 16 h,
в) третиот часовник 12 h до 15 h.
За секој од наведените случаи определи колкав дел од кружницата е кружниот лак и колку степени има соодветниот централен агол?

Да ја пресметаме должината l на кружен лак $\overset{\frown}{AB}$ во кружница со радиус r, ако соодветниот централен агол е α (црт. 1).
На централен агол од 1° му одговара кружен лак чијашто должина ќе биде $\frac{1}{360}$ од должината на кружницата, односно



црт. 1

$$l_{1^\circ} = \frac{1}{360} \cdot L = \frac{L}{360} = \frac{2\pi r}{360} = \frac{2\pi r \cdot 1^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r \cdot 1^\circ}{180^\circ}.$$

На централен агол од 2° му одговара два пати подолг кружен лак од претходниот, односно

$$l_{2^\circ} = \frac{\pi r \cdot 1^\circ}{180^\circ} \cdot 2 = \frac{\pi r \cdot 2^\circ}{180^\circ}, \text{ итн.}$$

На тој начин, заклучуваме дека на централен агол α му одговара кружен лак со должина:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}.$$

Во кружница со радиус r, должината на кружен лак l којшто одговара на централен агол α, се пресметува по формулата:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}.$$

Пример 1

Пресметај ја должината на кружен лак од кружница со радиус 12 cm, што одговара на централен агол $\alpha = 18^\circ$.

Според формулата за пресметување на должината на кружен лак наоѓаме дека:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} \approx \frac{3{,}14 \cdot 12\,\text{cm} \cdot 18^\circ}{180^\circ} = 3{,}768\ \text{cm}.$$

Задача 1

Пресметај ја должината на кружен лак што одговара на централен агол од 140° во кружница со радиус 3,2 dm.

Задача 2

Пресметај ги должините на кружните лакови на две концентрични кружници со радиуси $r_1 = 3$ cm и $r_2 = 5$ cm, кои одговараат на ист централен агол $\alpha = 122^\circ\ 30'$.

Задача 3

Марко сака да постави ограда од жица околу мала градина во форма на круг со радиус 4 m. Колку метри жица треба да купи Марко, ако сака оградата да биде половина од кружницата?

Активност

Како можеш од формулата $l = \frac{\pi r \alpha}{180°}$ да го пресметаш:

а) радиусот r, ако се дадени l и α, б) централниот агол α, ако се дадени r и l?

Пример 2

Пресметај го радиусот на кружницата во која на кружен лак $l = 11$ cm одговара централен агол $\alpha = 42° 30'$.

Дадениот централен агол треба да го претвориме во степени: $\alpha = 42° 30' = 42{,}5°$.
Од формулата за пресметување на должина на кружен лак наоѓаме дека радиусот на кружницата изнесува:

$$r = \frac{180° \cdot l}{\pi \alpha} \approx \frac{180° \cdot 11\text{cm} \cdot 7}{22 \cdot 42{,}5°} = 14{,}8 \text{ cm}, \text{ каде } \frac{1}{\pi} \text{ е запишано како } \frac{7}{22}.$$

Задача 4

Ангела сака да направи патека во дворот која е дел од кружница. Должината на патеката е 15 m, а централниот агол на кружницата што го зафаќа патеката е 120°. Колкав е радиусот на кружницата што ја формира патеката?

Пример 3

Јован поставува кружна рампа за велосипед. Должината на кружниот лак на рампата е 8 m, а радиусот на кружницата чијшто дел е рампата е 5 m. Колкав е централниот агол α на кружницата чијшто дел е рампата?

Според формулата за пресметување на должина на кружен лак наоѓаме дека централниот агол α на кружницата, чијшто дел е рампата изнесува:

$$\alpha = \frac{180° \cdot l}{\pi r} \approx \frac{180° \cdot 8\text{m}}{3{,}14 \cdot 5\text{m}} = 91{,}7°.$$

Задача 5

Пресметај го централниот агол во кружница со радиус 10 cm, ако должината на кружниот лак што одговара на тој агол е 6,28 cm.

Пример 4

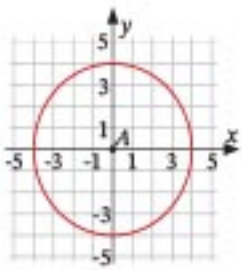
Без користење на формулата за должина на кружен лак, одреди ја должината на кружницата во која на централен агол од 40° му одговара кружен лак со должина 6 dm.

Бидејќи $\alpha = 40° = \frac{1}{9} \cdot 360°$, должината на кружницата изнесува $L = 9 \cdot l = 6\text{ dm} \cdot 9 = 54\text{ dm}$.

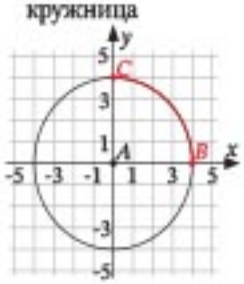
Задача 6

Пресметај ја должината на кружниот лак означен со црвена боја на цртеж 2.

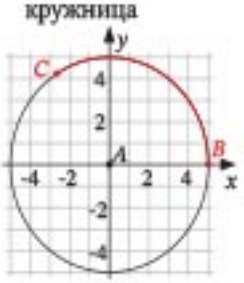
а) Цела кружница



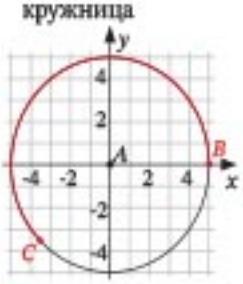
б) Четвртина од кружница



в) Третина од кружница



г) Пет осмини од кружница



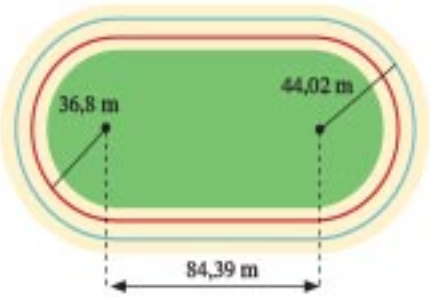
црт. 2

Пример 5

На атлетска патека трчаат двајца тркачи - едниот по сината, а другиот по црвената патека. Аглите што се соодветни на кружните лакови се по 180°, а радиусите на кружниците за секој од тркачите се дадени на цртеж 3.

а) Колкаво растојание минува секој од тркачите ако истрча еден круг по патеката?

б) Заокружи ја на најблискиот метар разликата меѓу истрчаните должини.



црт. 3

Патеката на секој тркач се состои од 2 прави патеки и 2 полукружни патеки.

Црвената патека е долга $2 \cdot 84{,}39\text{ m} + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 36{,}8\text{ m}) \approx 399{,}88\text{ m}$.

Сината патека е долга $2 \cdot 84{,}39\text{ m} + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 44{,}02\text{ m}) \approx 445{,}23\text{ m}$.

Разликата од должината на сината патека со должината на црвената патека, заокружена на најблискиот метар, изнесува:

$445{,}23\text{ m} - 399{,}88\text{ m} = 45{,}35\text{ m} \approx 45\text{ m}$.

Задача 8

Матеј треба да засади и да загради градина во форма на три четвртини од круг во аголот од својата куќа (слика 1). Оградата има должина 38 m. Колкав треба да биде радиусот на градината за да може да ја загради целата градина? Резултатот заокружи го на цел број метри.



слика 1

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај:

а) должина на кружен лак во кружница со радиус $r = 12$ cm и соодветен централен агол $\alpha = 120^{\circ}$,

б) должина на кружен лак во кружница со дијаметар $d = 8$ cm и соодветен централен агол $\alpha = 22^{\circ}\,30'$,

в) централен агол кој одговара на кружен лак со должина $l = 3{,}14$ cm и радиус на кружницата $r = 2$ cm,

г) радиус на кружницата во која на централен агол $\alpha = 108^{\circ}$ му одговара кружен лак со должина $l = 9{,}42$ cm.

2. Истражувачи картографирале парче мраз кое е една осмина од кружна поларна ледена површина со радиус 1000 km. Колкава е должината на заобленият дел од мразот?

3. Колкава должина има кружен лак чиј соодветен централен агол е 135° во кружница со должина 6,8 cm?

4. Колкав е радиусот на Земјата, ако должината на Земјиниот меридијан е приближно 40 000 km?

5. На часот по биологија, учениците учат за форма на крвни садови. Тие мереле дел од кривината на еден голем артериски лак и утврдиле дека неговата должина е 12 cm, а централниот агол што одговара на лакот е 90°. Колкав е радиусот на кружницата чиј дел е кривината на артеријата?

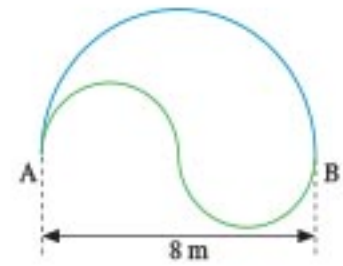
6. Тобоган во детско игралиште има кружна кривина со должина на лак 12 m и централен агол 120°. Колкав е радиусот на кривината?

7. Јован поставува ограда околу кружна цветна градина. Тој измерил дека должината на кружниот лак што одговара на централен агол од 60° е 5,24 метри. Колку метри ограда е потребно за оградување на целата градина?

8. Колкав централен агол одговара на кружен лак чија должина е еднаква на радиусот на кружницата?

9. Која е пократката патека од A до B на цртеж 4, сината или зелената патека?

10. Периферен агол од 36° зафаќа кружен лак со должина 2,5 m. Одреди го периметарот на кружницата.

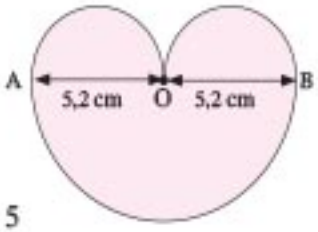


црт. 4

11. Должината на земјиниот меридијан е 40003,423 km. Пресметај ја должината на лакот што одговара на: а) 1°, б) 1′.
(Должината на лакот на земјиниот меридијан што му одговара на 1′ се вика **морска милја**).

12. Метална лента била свиткана во форма на кружница со радиус 4 cm. За потребите на лимарска работилница таа лента била разотворена во кружен лак со радиус 10 cm. Колкав централен агол одговара на добиениот кружен лак?

13. Честитката е составена од три полукруга при што O е центарот на големиот полукруг (црт. 5). Сара сака да го украси растојанието околу честитката со лента. Колку лента ѝ треба на Сара? Заокружи го одговорот на најблискиот центиметар.



црт. 5

Истражување

Пред повеќе од 2000 години, грчкиот научник Ератосен ја проценил обиколката на Земјата, претпоставувајќи дека сончевите зраци се паралелни. На пладне за време на летната долгодневица, во Сиена (денешен Асуан) Сонцето паѓало вертикално (без сенка во бунар), додека во Александрија вертикална прачка фрлала сенка со агол 7,2° (црт. 6). Растојанието по меридијан од Сиена до Александрија е околу 5000 стадии („стадија“ е стара египетска мерка за должина).

а) Колкав е централниот агол α меѓу градовите?

б) Објасни како Ератостен ја проценил обиколката на Земјата.

в) Процени ја обиколката на Земјата во стадии.

г) Ако 1 стадија = 157,5 m, пресметај колку километри е обиколката на Земјата.



црт. 6

5. ПЕРИМЕТАР НА СЛОЖЕНИ 2Д ФОРМИ

Активност

Фарма во форма на правоаголник со димензии 400 m на 350 m е оградена со 4 реда жица (слика 1).

Пресметај го:

а) периметарот на фармата,

б) вкупната должина на жица за оградување,

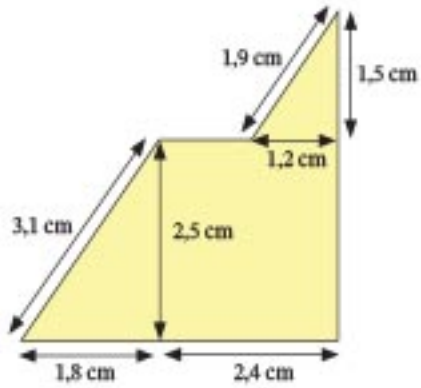
в) колку чини жицата за оградување ако цената е 140 денари за метар.


слика 1

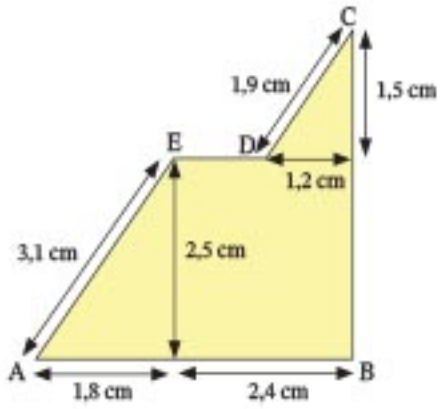
Често во секојдневниот живот се јавува потребата за пресметување на збирови од должини на едноставни или сложени 2Д форми. Во тој случај внимаваме на тоа од кои 2Д форми или нивни делови е составена сложената 2Д форма и користиме веќе познати формули за пресметување на периметарот.

Пример 1

Пресметај го периметарот на сложената 2Д форма прикажана на цртеж 1.



црт. 1



црт. 2

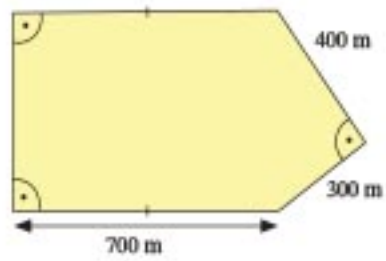
Според цртеж 2 наоѓаме дека $\overline{DE} = 2{,}4\text{ m} - 1{,}2\text{ m} = 1{,}2\text{ m}$.

Периметарот е збирот од должините на страните на сложената 2Д форма:

$$L = 1{,}5\text{ m} + 1{,}9\text{ m} + 1{,}2\text{ m} + 3{,}1\text{ m} + 1{,}8\text{ m} + 2{,}4\text{ m} + 2{,}5\text{ m} = 14{,}4\text{ m}.$$

Задача 1

Константин наутро трча околу блискиот трговски центар. Неговите димензии се дадени на цртеж 3. Колку пати треба да го заобиколи трговскиот центар за да истрча вкупно 13 km?



црт. 3

Пример 2

На цртеж 4 е претставен прозорец кој е составен од квадрат и полукруг. Пресметај го неговиот периметар.

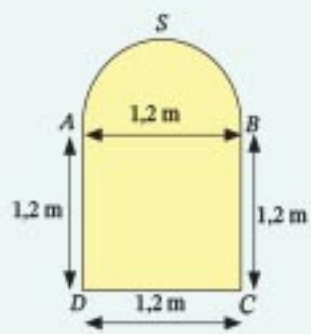
Периметарот на прозорецот е збир од должините на страните *AD*, *DC* и *BC* и должината на полукружницата *ASB*. Бидејќи

$\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{DC} = 1{,}2\text{ m}$

и полукружницата има дијаметар 1,2 m, добиваме дека

$$L = 3 \cdot \overline{AD} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \pi \approx 3 \cdot 1{,}2\text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}2\text{ m} \cdot 3{,}14 =$$

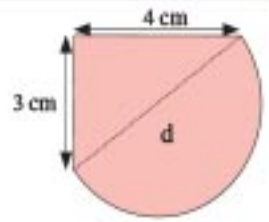
$$= 3{,}6\text{ m} + 1{,}884\text{ m} = 5{,}484\text{ m}.$$



црт. 4

Пример 3

Приврзокот прикажан на цртеж 5 треба да се обраби со златна жица по работ. Пресметај ја должината на златната жица која треба да се употреби.



црт. 5

Приврзокот е составен од правоаголен триаголник и полукруг. Дијаметарот на кругот е

$$d=\sqrt{(3\text{cm})^2+(4\text{cm})^2}=\sqrt{9\text{cm}^2+16\text{cm}^2}=\sqrt{25\text{cm}^2}=5\text{cm}.$$

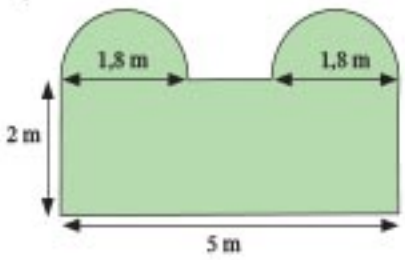
Периметарот на приврзокот е збир од должините на катетите на правоаголниот триаголник и полупериметарот на кругот:

$$L\approx 3\text{cm}+4\text{cm}+\frac{5\text{cm}\cdot 3{,}14}{2}=14{,}85\ \text{cm}\approx 15\ \text{cm}.$$

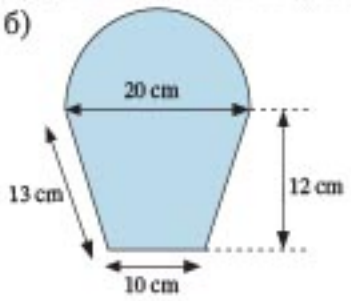
Задача 2

Пресметај го периметарот на 2Д формите дадени на цртеж 6.

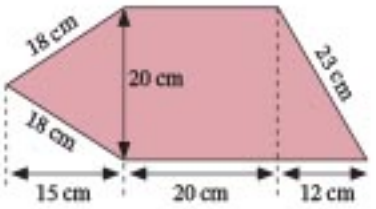
а)



б)



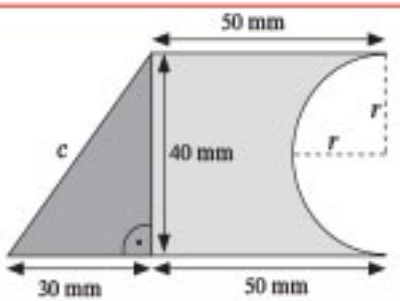
в)



црт. 6

Задача 3

Пресметај го периметарот на машински елемент даден на цртеж 7.



црт. 7

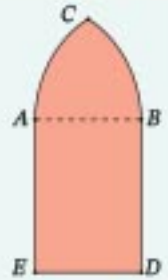
Пример 4

Колкава должина од ПВЦ профил ќе биде потребна за да се изработи прозорец со форма како на цртеж 8. Точките A, B и C се темиња на рамностран триаголник, A е центар за кружниот лак $\overset{\frown}{BC}$, B е центар за кружниот лак $\overset{\frown}{AC}$, $\overline{ED}=0{,}5$ m и $\overline{BD}=2\cdot\overline{ED}$.

Бидејќи A, B и C се темиња на рамностран триаголник, кружните лаци се над агли од 60° ($\alpha=60°$, $r=\overline{AB}=0{,}5$ m, $\overline{BD}=2\cdot\overline{ED}=2\cdot 0{,}5=1$ m).
Периметарот на формата изнесува:

$$L\approx 1+0{,}5+1\text{m}+2\cdot\frac{0{,}5\text{m}\cdot 60°\cdot 3{,}14}{180°}=2{,}5\text{m}+2\cdot 0{,}52\text{m}=3{,}54\ \text{m}.$$

За изработка на прозорецот се потребни 3,54 m ПВЦ профил.



црт. 8

Пример 5

На цртеж 9 е претставен тревник во форма на трапез и кружен цветник во него. Тревникот и цветникот треба да се оградат со 2 реда декоративно јаже чија цена е 78 денари за метар. Колку пари треба да плати претпријатието „Уреден град“ за оградување со јажето?

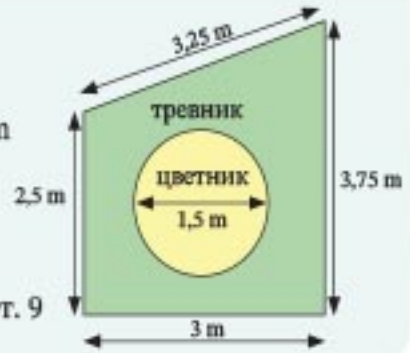
Должината на 1 ред јаже што е потребно за оградување изнесува:

$L = L_1 + L_2 \approx 3\text{ m} + 3{,}75\text{ m} + 3{,}25\text{ m} + 2{,}5\text{ m} + 1{,}5\text{ m} \cdot 3{,}14 = 17{,}21\text{ m}$

За 2 реда потребно е приближно $17{,}21 \cdot 2 = 34{,}42$ m јаже.

Сумата што треба да ја плати претпријатието изнесува:

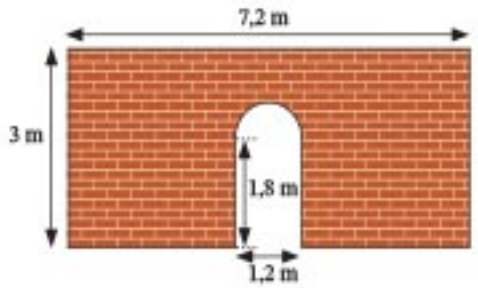
$34{,}42\text{ m} \cdot 78\text{ ден.} = 2684{,}76\text{ ден.} \approx 2685$ денари.



црт. 9

Задача 4

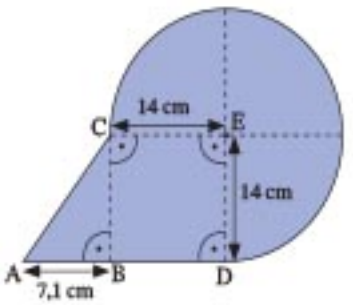
Пресметај колкава должина на лајсни ќе биде потребна за да се обраби ѕид со форма и димензии како на цртеж 10.



црт. 10

Задача 5

Пресметај го периметарот на формата прикажана на цртеж 11.

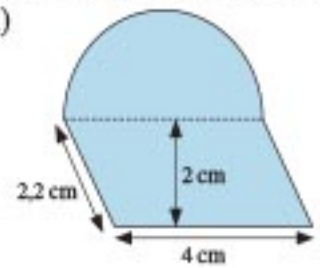


црт. 11

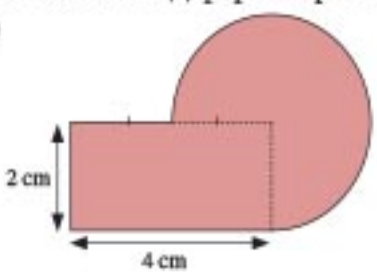
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај го периметарот на сложените 2Д форми прикажани на цртеж 12:

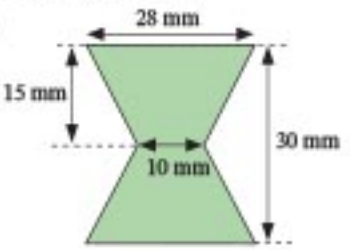
а)



б)

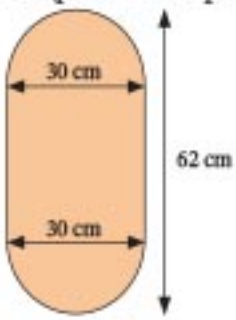


в)

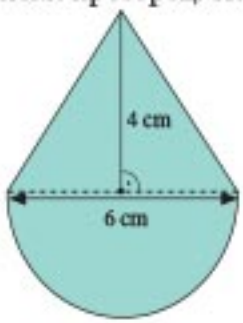


црт. 12

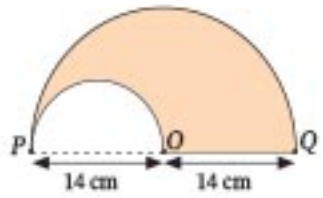
2. На цртеж 13 е прикажан авионски прозорец. Најди го неговиот периметар.



црт. 13



црт. 14

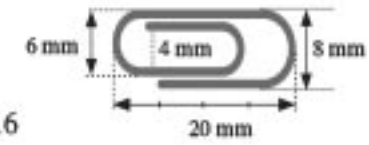


црт. 15

3. На цртеж 14 е дадена везена апликација за облека која треба да се опшие по рабовите со украсна лента. Пресметај ја должината на лентата што ќе се употреби за украсување.

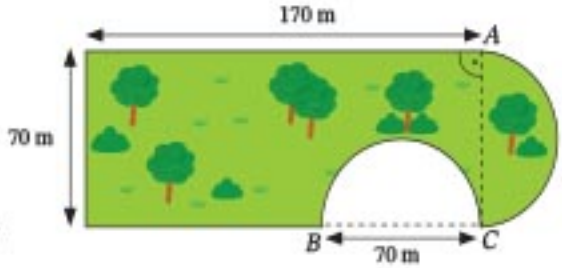
4. Машински работник сече голем полукруг со дијаметар од 28 cm. Потоа, работникот сече помал полукруг од поголемиот и го отстранува (црт. 15). Дијаметарот на полукружното парче што е отстрането е 14 cm. Најди го периметарот на добиената форма. Користи $\pi \approx \frac{22}{7}$.

5. Во фабрика за канцелариски материјали се изработуваат спојувалки (црт. 16).
Колку спојувалки можат да се изработат од челична жица со должина 10 m?



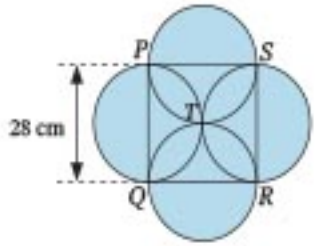
црт. 16

6. На цртеж 17 е прикажан парк во форма на правоаголник со додаден полукруг на едната страна и одземен друг полукруг на другата страна. Најди ја должината на патеката околу паркот.
Користи $\pi \approx \frac{22}{7}$.

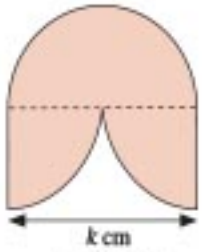


црт. 17

7. Жица е свиткана за да се добие 2Д формата дадена на цртеж 18. Формата е составена од четири идентични кружници. Секоја кружница се сече со две други. Четирите кружници се сечат во заедничка точка T, која е центар на квадратот $PQRS$. Најди ја должината на жицата. Користи $\pi \approx \frac{22}{7}$.



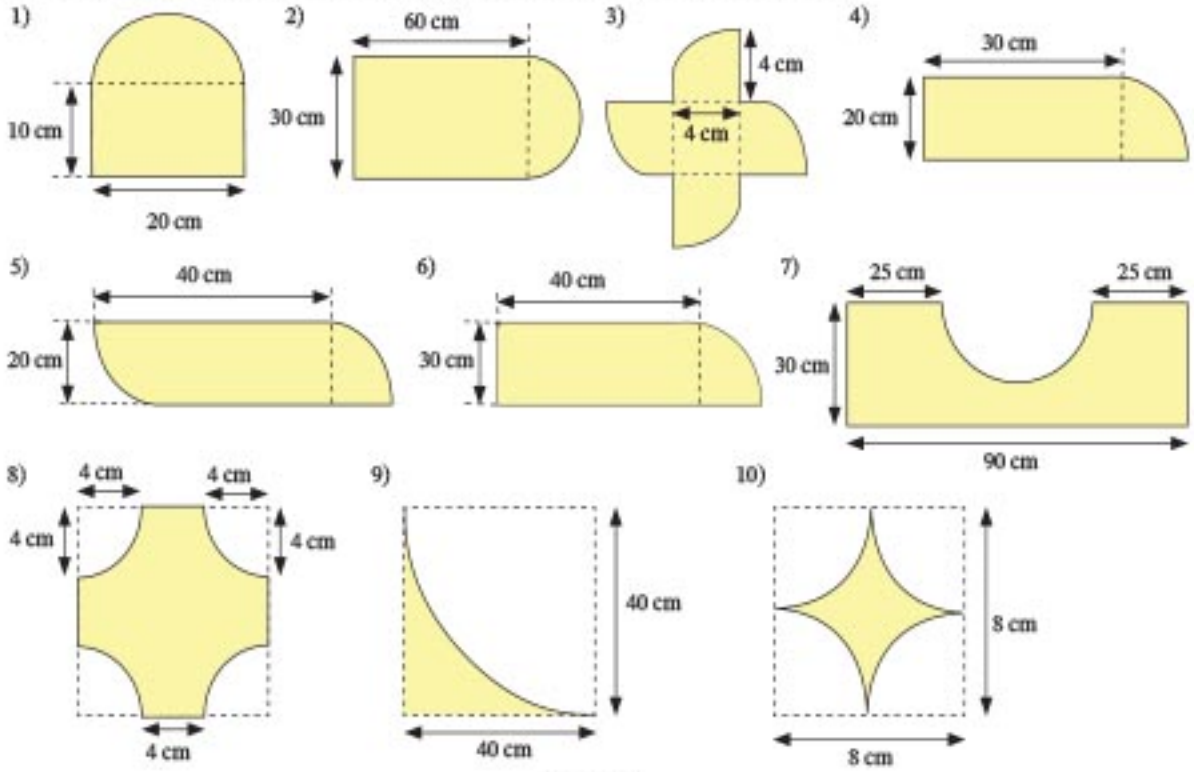
црт. 18



црт. 19

8. Периметарот на 2Д формата дадена на цртеж 19 изнесува 97,29 dm.
Најди ја вредноста на k.

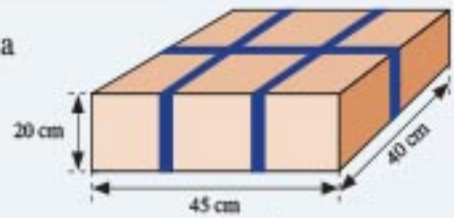
9. Пресметај го периметарот на 2Д формите дадени на цртеж 20:



црт. 20

Истражување

Кутија за лаптоп со димензии како на слика 1 е спакувана со 3 пластични ленти, така што двата краја на секоја лента на местото каде што се спојуваат се преклопуваат со должини од 5 cm. Пресметај колку пластична лента е потребна за пакување на 200 кутии?

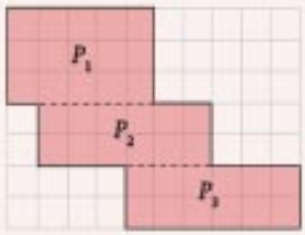


слика 1

6. ПЛОШТИНА НА ПАРАЛЕЛОГРАМ

Активност

Колку изнесува плоштината P на формата на цртеж 1? Колкави се плоштините на формите на цртеж 2? Дали формите се складни?



црт. 1



црт. 2

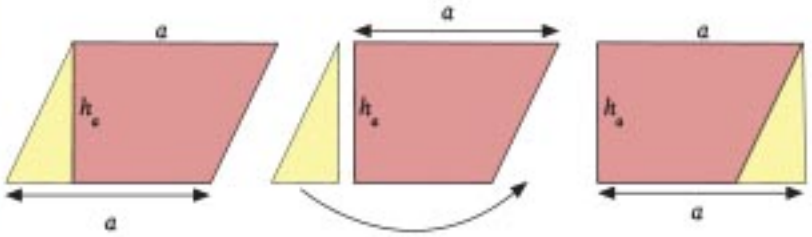
Формите на цртеж 2 не се складни, но се состојат од ист број (16) складни квадратчиња. За нив велиме уште дека се **еднаквоплоштни**.

Во секојдневниот живот често се наоѓаме во ситуации во кои има потреба од определување на плоштината на 2Д форма. Притоа секогаш се потпираме на следните својства на плоштината:

1. Мерниот број на плоштината на секоја 2Д форма е позитивен број.
2. Складните 2Д форми имаат еднакви плоштини.
3. Ако 2Д формата е составена од повеќе делови што не се преклопуваат, тогаш нејзината плоштина е збир од плоштините на деловите.

За да ја определиме плоштината на паралелограм ќе го искористиме цртеж 3.

Паралелограмот на цртежот го „сечеме“ по една од неговите висини и „отсечениот“ триаголник го поместуваме до добивање на друг паралелограм. Бидејќи висината h_a е нормална на страната a, добиениот паралелограм е правоаголник со страни a и h_a. Неговата плоштина е производ од должините a и h_a. Добиениот правоаголник е еднаквоплоштен со паралелограмот.

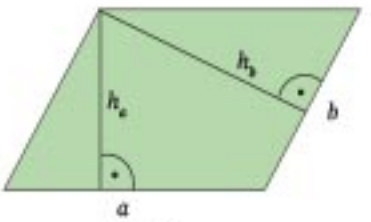


црт. 3

Скенирај го кодот

На цртеж 4 е даден паралелограм со страни a и b. Повлечени се висините h_a и h_b, соодветни на страните на a и b. Плоштината на паралелограм е еднаква на производот од должините на страната и соодветната висина, односно

$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b.$$



црт. 4

Плоштината на паралелограм е еднаква на производот од должините на која било страна и соодветната висина.

Според тоа, плоштината P на паралелограм се пресметува по формулите:

$$P = a \cdot h_a \text{ или } P = b \cdot h_b,$$

каде што a и b се страните, а h_a и h_b се соодветните висини на страните на парелограмот.

Пример 1

Едната страна на паралелограмот е 5 cm, а висината спуштена кон неа е 3 cm. Колку изнесува плоштината на паралелограмот?

Според условите во задачата имаме дека $a = 5$ cm и $h_a = 3$ cm. Плоштината на паралелограмот изнесува

$$P = a \cdot h_a = 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$$

Активност

Како можеш од формулата $P = a \cdot h_a$ да ја пресметаш:
а) страната a, ако се дадени P и h_a, б) висината h_a, ако се дадени a и P?

Пример 2

Едната страна на паралелограмот е долга 15 cm, а соодветната висина е долга 8 cm.
а) Колку изнесува висината што одговара на другата страна со должина 12 cm?
б) Спореди ги должините на страните и соодветните висини. Што забележуваш?

а) Според условите во задачата имаме дека $a = 15$ cm, $h_a = 8$ cm и $b = 12$ cm.
Плоштината на паралелограмот изнесува:
$P = a \cdot h_a = 15 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 120 \text{ cm}^2$.
Според формулата $P = b \cdot h_b$ добиваме
$$h_b = \frac{P}{b} = \frac{120}{12} = 10 \text{ cm}.$$
б) Забележуваме дека висината кон подолгата страна на паралелограмот е помала од висината кон покусата страна на паралелограмот.

Задача 1

Пресметај ја висината h_b на паралелограм, ако се познати должините на страните $a = 4$ cm, $b = 5$ cm и должината на неговата висина $h_a = 3$ cm.

Задача 2

Должините на страните на паралелограмот се 10 dm и 1,2 m. Колку изнесува поголемата висина, ако пократката е 45 cm?

Задача 3

Како ќе се промени плоштината на паралелограмот, ако:
а) една страна му се зголеми 2 пати, б) една страна му се намали 3 пати.

Пример 3

Земјоделско стопанство планира да засее парцела во форма на паралелограм со еден пар страни долги по 1200 m и растојание меѓу нив 750 m. Ако семето чини 82,5 денари по хектар, колку ќе изнесува вкупната цена за засејување на целата парцела?

Плоштината на нивата изнесува:
$P = 1200 \text{ m} \cdot 750 \text{ m} = 900\,000 \text{ m}^2 = 90 \text{ hm}^2$ $(1 \text{ hm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2)$
Вкупната цена за засејување на целата парцела е 90 · 82,5 ден. = 7425 денари.

Задача 4

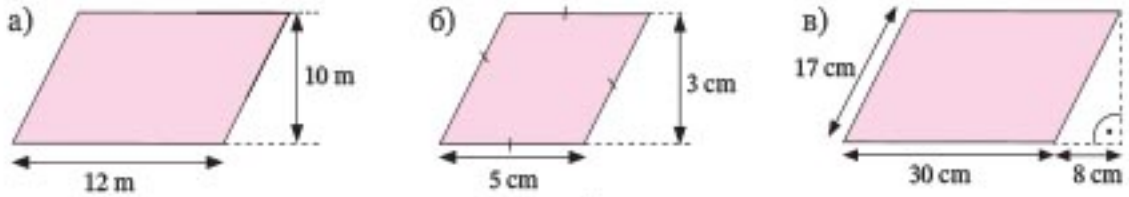
Градежна фирма треба да поплочи дел од паркинг што има облик на паралелограм. Должината на една страна е 80 m, а растојанието меѓу страните е 60 m. Ако поставувањето на плочките чини 125 денари по квадратен метар, колку ќе изнесува вкупната цена за поплочување на целиот паркинг?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Прецртај ја и пополни ја табелата во која се дадени вредностите за некои елементи на паралелограм.

a	b	h_a	h_b	P
9 cm	12 cm			36 cm²
12 mm	7,5 mm	5 mm		
		9 cm	0,3 dm	18 cm²
12 cm			6 dm	24 dm²

2. Пресметај ја плоштината на паралелограмите на цртеж 5:



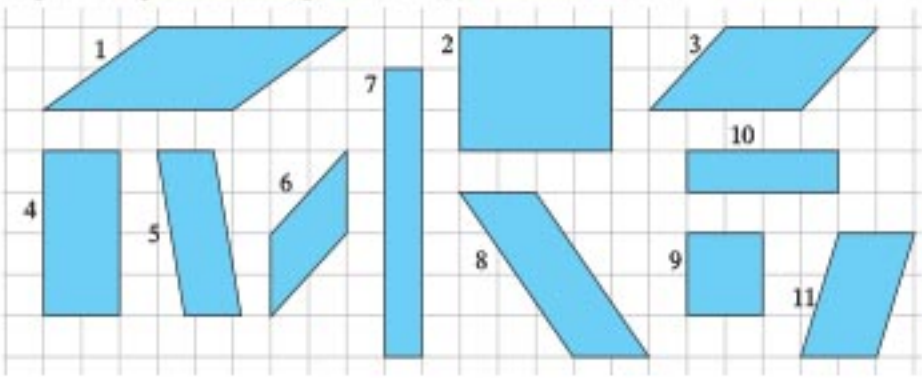
црт. 5

3. Плоштината на паралелограм е 36 cm², а неговите висини се долги 4 cm и 6 cm. Пресметај го неговиот периметар.

4. Плоштината на ромб е 24 cm², неговиот периметар е 24 cm. Пресметај ја висината на ромбот.

5. Пресметај плоштина на ромб со периметар 36 cm, ако висината е за 2 cm помала од страната.

6. Кои од паралелограмите на цртеж 6 се еднаквоплоштни?

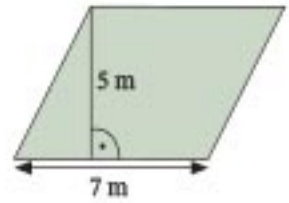


црт. 6

7. Наставникот ги замолил своите ученици да ја запишат плоштината на паралелограмот од цртеж 7. Мира напишала 12 m², а Јован напишал 35 m. И двајцата погрешиле.

а) Објасни ја грешката на секој од нив.

б) Запиши го точниот одговор.



црт. 7

8. Саид има нива во форма на ромб со должина на оградата 96 m и растојание меѓу спротивните страни 18 m. Тој има вреќа со ѓубриво од 15 kg на чија етикета пишува „Користете 35 g ѓубриво на квадратен метар". Дали Саид има доволно ѓубриво за цела нива?

9. Шивачка треба да направи завеса во форма на паралелограм. Должината на долната страна на завесата е 2,4 m, а соодветната висина е 1,8 m. Колкава е плоштината на ткаенината што ѝ е потребна за изработка на завесата?

10. Мајстор изработува декорација на ѕид составен од плочки во форма на паралелограм. Секоја плочка има страна долга 45 cm, а соодветната висина е 30 cm.

а) Пресметај ја плоштината на една плочка во центиметри квадратни и во метри квадратни.

б) Ако ѕидот што треба да се покрие има површина од 4,5 m², колку плочки се потребни за целиот ѕид?

в) Ако една плочка чини 85 денари, колку ќе изнесува вкупната цена за поставување на сите плочки?

Истражување

1. Даден е квадрат *MNPQ*. Конструирај паралелограм со страна *MN* и остар агол 60° што има еднаква плоштина со квадратот. Образложи ја постапката.

2. Со користење на геометриски софтвер нацртај паралелограм, определи ја неговата плоштина и истражувај како таа се менува со промена на страните и висините. Нацртај повеќе еднаквоплоштни паралелограми со првиот нацртан паралелограм.

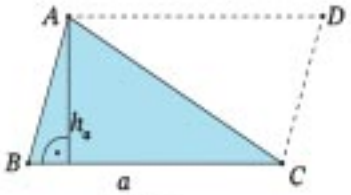
7. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

Активност

Нацртај паралелограм *ABCD* и повлечи една негова дијагонала и двете висини. Дали добиените триаголници се складни и зошто? Означи по една висина на секој од добиените триаголници.

Триаголникот ABC со основа a и соодветна висина h_a е „доцртан“ до паралелограм $ABCD$ (црт. 1). Тој се состои од два складни триаголници ABC и CDA. Затоа, плоштината на секој од нив е еднаква на половината од плоштината на паралелограмот $ABCD$:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a .$$



црт. 1

Значи, плоштината P на триаголник со основа a и висина h_a изнесува

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2}.$$

Скенирај го кодот за плоштина на триаголник.

На сличен начин можеме да заклучиме дека, и за другите две страни b и c, и соодветните висини h_b и h_c, важат формулите:

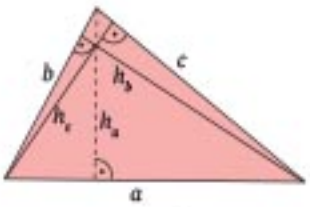
$$P = \frac{b \cdot h_b}{2} \text{ и } P = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

Плоштината на триаголник е еднаква на полупроизводот од должините на која било страна и соодветната висина.

Според тоа, плоштината на триаголник P се пресметува по формулите (црт. 2):

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} \text{ или } P = \frac{b \cdot h_b}{2} \text{ или } P = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

каде што a, b и c се страните, а h_a, h_b и h_c се соодветните висини на страните на триаголникот.



црт. 2

Пример 1

Пресметај ја плоштината на триаголник со страна $a = 18$ cm, и висина $h_a = 10$ cm.

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{18\text{cm} \cdot 10\text{cm}}{2} = 90 \text{ cm}^2.$$

Задача 1

Пресметај ја плоштината на триаголник, ако се дадени:

а) $b = 1{,}2$ dm и $h_b = 0{,}8$ dm,

б) $c = 3\frac{2}{5}$ m и $h_c = 7{,}6$ m.

Активност

Како можеш од формулата $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ да ја пресметаш:

а) страната a, ако се дадени P и h_a,

б) висината h_a, ако се дадени a и P?

Пример 2

Пресметај ја должината на страната на триаголник со плоштина $P = 39\ \text{cm}^2$, ако висината спуштена кон страната a е долга 7,8 cm.

Според условите во задачата имаме дека $h_a = 7{,}8\ \text{cm}$ и $P = 39\ \text{cm}^2$. Според формулата $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ за страната a добиваме

$$a = \frac{2P}{h_a} = \frac{2 \cdot 39\text{cm}^2}{7{,}8\text{cm}} = 10\,\text{cm}.$$

Задача 2

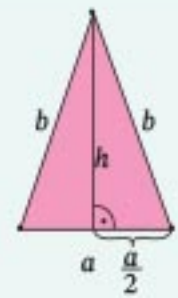
Од еден триаголен мозаик Ања составува нов, во форма на триаголник со иста плоштина. Ако должината на страната на првиот мозаик е 9 cm, а соодветната висина е 6 cm, колкава ќе биде висината на вториот мозаик, ако неговата страна е 12 cm?

Пример 3

Пресметај ја плоштината на рамнокрак триаголник со периметар $L = 36$ cm и основа $a = 8$ cm (црт. 3).

Според формулата за пресметување периметар на рамнокрак триаголник $L = a + 2b$, добиваме дека

$$b = \frac{L - a}{2} = \frac{36\text{cm} - 8\text{cm}}{2} = 14\ \text{cm}.$$



црт. 3

Со примена на Питагоровата теорема, за висината h спуштена кон страната a наоѓаме дека

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(14\text{cm})^2 - (4\text{cm})^2} = \sqrt{180\text{cm}^2} \approx 13{,}4\,\text{cm}.$$

Вредноста $\sqrt{180}$ ја пресметуваме со калкулатор на соодветното копче.

Земаме приближна вредност, во овој случај заокружена на една децимала.

Бараната плоштина на рамнокракиот триаголник изнесува

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{8\text{cm} \cdot 13{,}4\text{cm}}{2} = 53{,}6\ \text{cm}^2.$$

Задача 3

Тревник има форма на рамнокрак триаголник со краци 5 m и висина кон основата 3 m. Колку вода е потребно за залевање во период на една седмица, ако за површина од 3 m^2 е потребно 5 l вода секој ден?

Задача 4

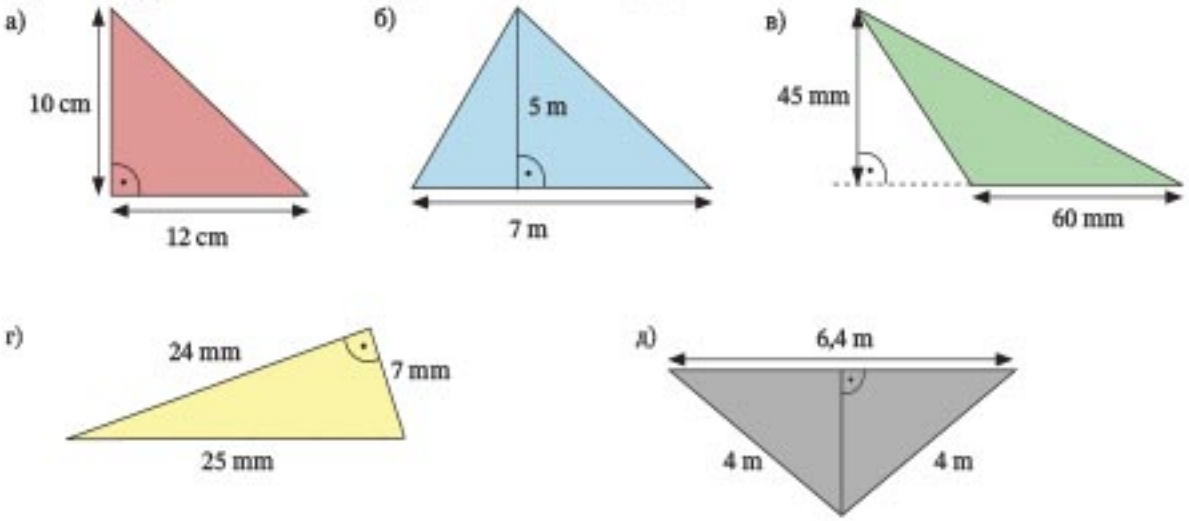
Пресметај ја плоштината на платното потребно за изработка на едрото од бродот (црт. 4). Колку ќе чини материјалот ако 1m² има цена од 326 денари?



црт. 4

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај ја плоштината на триаголниците од цртеж 5:



црт. 5

2. За даден триаголник ABC пресметај:

а) b, ако $P = 64\ \text{cm}^2$ и $h_b = 8\ \text{cm}$, б) h_c, ако $P = 8\ \text{cm}^2$ и $c = 3{,}2\ \text{cm}$.

3. Паралелограм со страна a и соодветна висина h_a и триаголник со страна $2a$ се еднаквоплоштни. Колкава е висината на триаголникот?

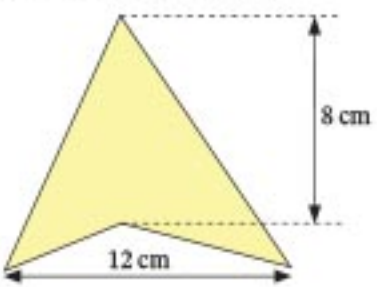
4. Како ќе се промени плоштината на триаголникот, ако страната:

а) се зголеми 3 пати, а соодветната висина остане непроменета,
б) се намали 6 пати, а соодветната висина се зголеми 2 пати.

5. Пресметај го периметарот на правоаголен триаголник ако неговата плоштина е 54 cm² и една негова катета е 2 cm.

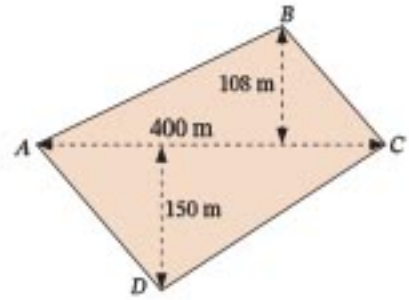
6. Изведи ја формулата за плоштина на рамностран триаголник користејќи ја Питагоровата теорема.

7. Амблемот на едно училиште е во форма дадена на цртеж 6. Пресметај ја неговата плоштина.



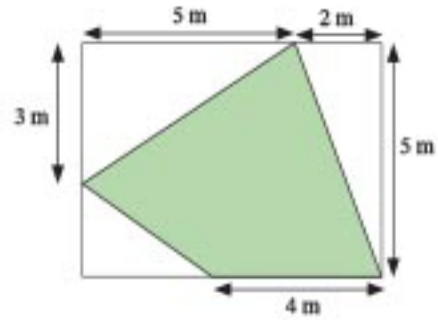
црт. 6

8. На цртеж 7 е дадено полето на еден фармер. Тој сака да го продаде по цена 1280 денари за метар квадратен. Пресметај ја цената на полето.



црт. 7

9. Пресметај колку пари ќе бидат потребни за семиња за нивата во форма како на цртеж 8, ако семето за 1 m² е 37 денари.



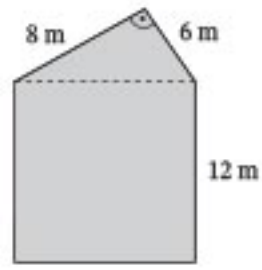
црт. 8

10. Ти си дел од тим кој треба да уреди паркинг простор во непосредна близина на твоето училиште. Паркингот има петаголна форма која е дадена на цртеж 9.

а) Колку ќе чини вкупното асфалтирање ако цената за 1 m² е 2350 денари?

б) Покрај трите подолги страни на паркингот предвиден е мал зелен појас кој ќе биде широк 1 m, со трева и други украсни растенија. Колку треба да се доплати за зеленият појас ако за 1 m² хортикултурно уредување треба да се плати 1200 денари?

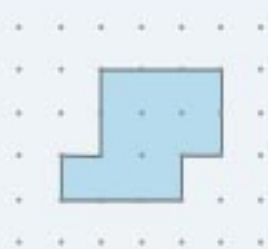
в) Предложи и други можни решенија за просторот (осветлување, автомат за вода, итн).



црт. 9

Истражување

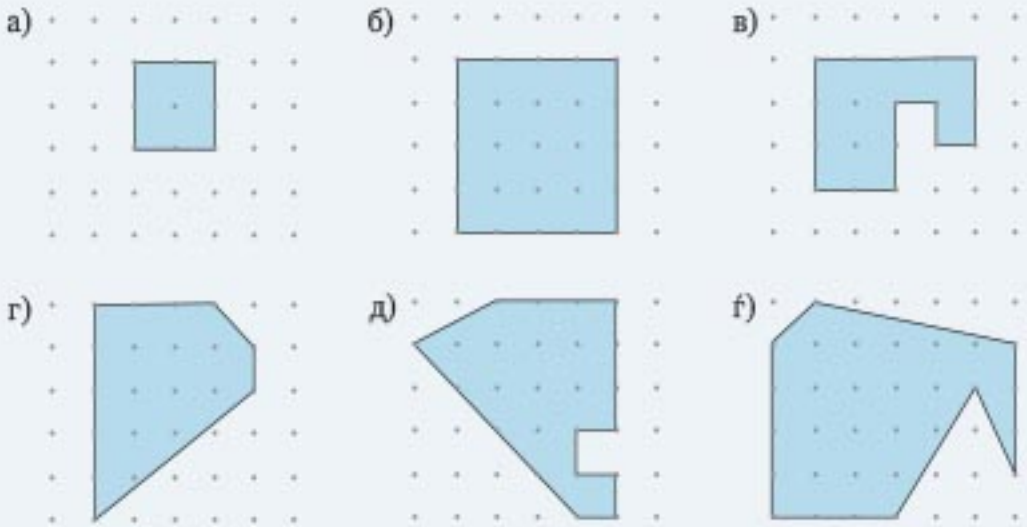
Разгледај ја 2Д формата која е нацртана на хартија со точки поставени во теминьата на мали квадрати. Точките кои лежат на страните на 2Д формата се гранични точки, додека оние што се во внатрешноста на 2Д формата се внатрешни точки. На цртеж 10, бројот на гранични точки $G = 14$, додека бројот на внатрешни точки е $V = 3$.



црт. 10

Обиди се да ја пополниш дадената табела според цртеж 11.

2Д форма	G	$\frac{G}{2}$	V	$\frac{G}{2}+V$	Плоштина P



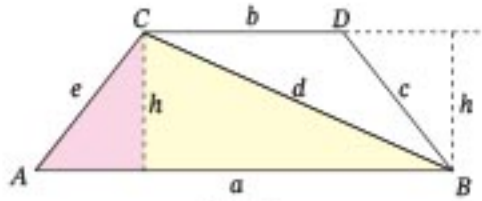
црт. 11

Разгледај ги двете последни колони од табелата и предложи правило што ги поврзува P, G и V. Нацртај неколку различни 2Д форми на хартија со точки и провери ја точноста на правилото.

8. ПЛОШТИНА НА ТРАПЕЗ

Активност

Нацртај трапез на парче хартија и означи ги неговите основи со a и b, а висината со h. Пресечи го трапезот по една негова дијагонала, за да го поделиш на два триаголници.
а) Колкава е висината на триаголниците, спуштена кон страната a, односно кон страната b?
б) Пресметај ја плоштината на двата триаголници.



црт. 1

Плоштината на трапезот *ABCD*, прикажан на цртеж 1, е збир од плоштините на триаголникот *ABC* и триаголникот *BDC*, односно

$$P = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta BDC} = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h .$$

Плоштината на трапез е еднаква на производот од полузбирот на должините на неговите основи и висината.

Значи, плоштината P на трапез ја пресметуваме според формулата:

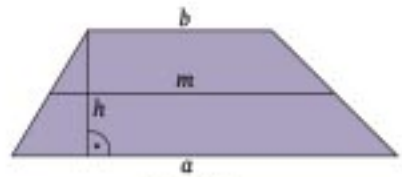
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h ,$$

каде што a и b се основите и h е висината на трапезот.

Скенирај го кодот.

Бидејќи полузбирот на должините на основите на трапезот е еднаков на должината на средната линија на трапезот $m = \frac{a+b}{2}$, горната формула за плоштина на трапез го добива видот

$$P = m \cdot h.$$



црт. 2

Пример 1

Пресметај ја плоштината на трапез, со основи $a = 2{,}5$ dm и $b = 8$ dm, и висината $h = 3$ dm.

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2{,}5\,\text{dm} + 8\,\text{dm}}{2} \cdot 3\,\text{dm} = 15{,}75\ \text{dm}^2.$$

Задача 1

Пресметај ја плоштината на трапез со средна линија $m = 12$ cm и висина $h = 0{,}72$ dm.

Пример 2

Дадени се едната основа $a = 13$ cm, плоштината $P = 50$ cm² и висината $h = 5$ cm на трапезот. Пресметај ја другата основа.

Од формулата за пресметување на плоштина на трапез $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$ добиваме

$$b = \frac{2P}{h} - a = \frac{2 \cdot 50\,\text{cm}^2}{5\,\text{cm}} - 13\,\text{cm} = 7\,\text{cm}.$$

Задача 2

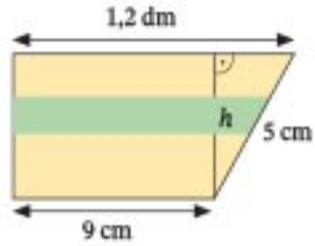
Пресметај ја средната линија на трапез со плоштина 1800 cm² и висина 9 dm.

Задача 3

Основите на трапез се 8,5 cm и 5,8 cm, а неговата плоштина е 42,9 cm². Пресметај ја висината на трапезот.

Пример 3

Лирим сака да изработи хартиени знамиња во форма на правоаголен трапез за навивачите на училишниот натпревар (црт. 3). Основите се 1,2 dm и 9 cm, а подолгиот крак е 5 cm. Колку квадратни сантиметри хартија му се потребни за да направи 40 такви знамиња?



црт. 3

Прво да ги претвориме сите должини во исти мерни единици.
1,2 dm = 12 cm.
Знамето има форма на трапез.
Според Питагоровата теорема, за висината на трапезот добиваме

$$h = \sqrt{(5\,\text{cm})^2 - (12\,\text{cm} - 9\,\text{cm})^2} = \sqrt{25\,\text{cm}^2 - 9\,\text{cm}^2} = \sqrt{16\,\text{cm}^2} = 4\,\text{cm}.$$

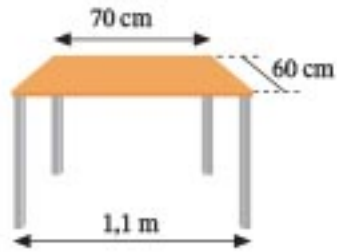
Плоштината на трапезот изнесува

$$P = \frac{12\,\text{cm} + 9\,\text{cm}}{2} \cdot 4\,\text{cm} = \frac{21\,\text{cm}}{2} \cdot 4\,\text{cm} = 42\ \text{cm}^2.$$

На Лирим му требаат $40 \cdot 42\ \text{cm}^2 = 1680\ \text{cm}^2$ хартија.

Задача 4

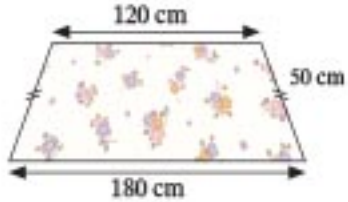
Во училница имало 25 клупи со дрвена површина во форма на рамнокрак трапез (црт. 4). Дрвената површина треба да се премачка со заштитна боја. Колку вкупно метри квадратни треба да се премачкаат со боја?



црт. 4

Задача 5

Весна сака да направи здолниште од материјалот на цртеж 5. Пресметај ја плоштината на материјалот.

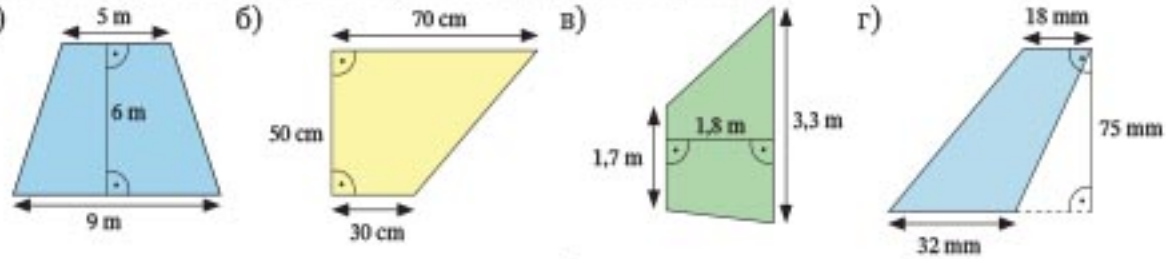


црт. 5

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај ја плоштината на трапезите дадени на цртеж 6.

а) б) в) г)



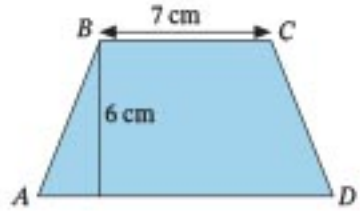
црт. 6

2. Прецртај ја во твојата тетратка и пополни ја табелата со бараните величини за трапез:

a	42 cm	8 dm		35 cm
b	34 cm	6 dm	20 cm	
h	25 cm		9 cm	12 cm
P		42 dm²	225 cm²	336 cm²

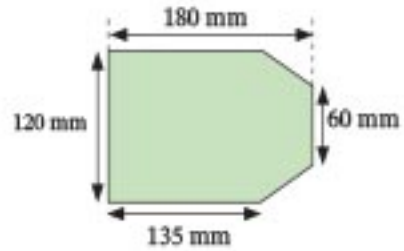
3. Пресметај ја средната линија на трапез со плоштина 280 dm² и висина 14 dm.

4. Пресметај ја должината на страната AD на трапезот $ABCD$ на цртеж 7, ако плоштината $P = 57$ cm².



црт. 7

5. Тенко метално парче во работилница за машински елементи има форма и димензии како на цртеж 8. Определи ја плоштината на едната страна на металното парче.



црт. 8

6. Една нива, која имала форма на трапез со основи 142 m и 86 m и висина 42 m, била посеана со памук. Од 1 декар биле набрани просечно 95 kg памук. Колку килограми памук биле набрани од целата нива?
Упатство: 1 декар = 10 ари.

7. Елена сака да уреди дел од дворот пред својата куќа со цветна површина во форма на трапез со основи 6 m и 3 m и висина 2,5 m. Елена сака да засади цвеќиња така што секој квадратен метар ќе има 12 садници.

а) Колку садници ќе ѝ бидат потребни за целата површина?

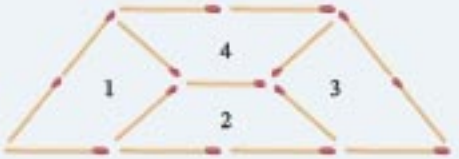
б) Ако една садница чини 50 денари, колку ќе ѝ биде вкупниот трошок?

в) Колку метри црево ќе ѝ треба, ако постави систем за наводнување кој поминува по периметарот на трапезот?

г) Ако секоја садница апсорбира 0,2 kg јаглерод диоксид дневно, колку вкупно јаглерод диоксид ќе се апсорбира за еден ден од сите засадени цвеќиња?

Истражување

На цртеж 9 е прикажан трапез составен од десет чкорчиња. Подели го трапезот на четири складни трапези со помош на пет други чкорчиња.

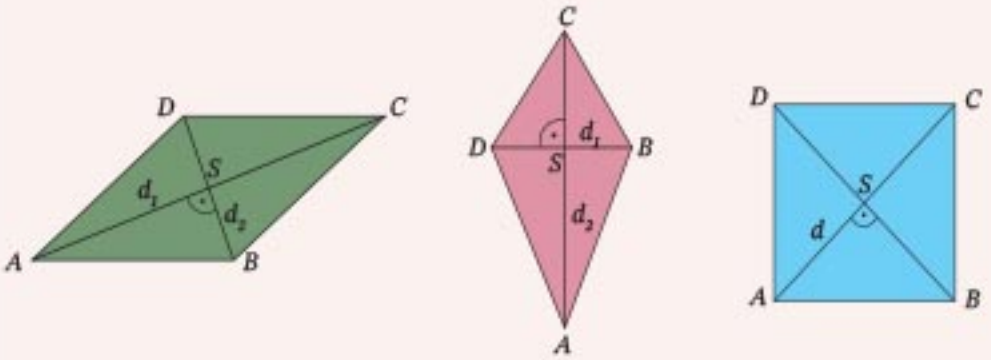


црт. 9

9. ПЛОШТИНА НА РОМБ, ДЕЛТОИД И КВАДРАТ

Активност

Нацртај ромб, делтоид и квадрат. Повлечи ги неговите дијагонали. Каква заемна положба имаат дијагоналите во секој од нацртаните четириаголници?



црт. 1

Дијагоналата AC е оска на симетрија за секој од четириаголниците на цртеж 1. Според тоа, за секој од четириаголниците важи $\Delta ABC \cong \Delta ADC$. Тоа значи дека

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ADC}.$$

Освен тоа, плоштината на секој четириаголник е збир од плоштините на двата триаголници, односно

$$P_{ABCD} = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ADC} = 2P_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BS}}{2} = \cancel{2} \cdot \frac{d_1 \cdot \frac{d_2}{2}}{\cancel{2}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Плоштината на ромб, делтоид и квадрат е еднаква на полупроизводот од должините на нивните дијагонали.

Според тоа, плоштина P на ромб и делтоид се пресметува според формулата:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2},$$

каде што d_1 и d_2 се дијагоналите на ромбот, односно делтоидот.

Специјално, плоштина на квадрат се пресметува според формулата:

$$P = \frac{d^2}{2},$$

каде d е дијагоналата на квадратот.

Пример 1

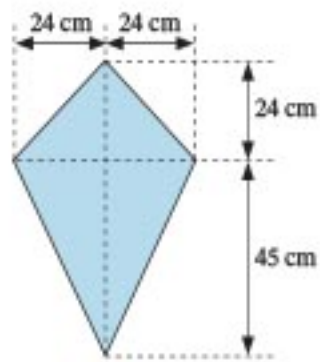
Пресметај ја плоштината на ромб со дијагонали $d_1 = 4{,}5$ cm и $d_2 = 8{,}3$ cm.

Плоштината на ромбот изнесува

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{4{,}5\,\text{cm} \cdot 8{,}3\,\text{cm}}{2} = 18{,}675\ \text{cm}^2.$$

Задача 1

Пресметај ја плоштината на летало во форма на делтоид даден на цртеж 2.



црт. 2

Активност

Како можеш од формулата за плоштина на делтоид $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ да ја пресметаш должината на едната дијагонала, ако е дадена плоштината P и должината на другата дијагонала?

Пример 2

Пресметај ја должината на непознатата дијагонала на делтоид, ако неговата плоштина е 90 cm^2 и другата дијагонала е долга 7,5 cm.

Според формулата за пресметување на плоштината на делтоид $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ добиваме дека

$$d_2 = \frac{2P}{d_1} = \frac{2 \cdot 90\,\text{cm}^2}{7{,}5\,\text{cm}} = 24\ \text{cm}.$$

Задача 2

Пресметај ја должината на дијагоналата на квадрат со плоштина 150 cm².

Пример 3

Пресметај ја плоштината на ромб со страна долга 5 cm, ако една од дијагоналите е долга 8 cm.

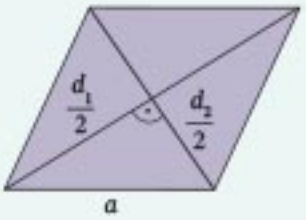
Дијагоналите на ромбот се заемно нормални (црт. 3).
Со примена на Питагоровата теорема добиваме

$$\frac{d_2}{2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}=\sqrt{(5\,\text{cm})^2-\left(\frac{8\,\text{cm}}{2}\right)^2}=\sqrt{9\,\text{cm}^2}=3\,\text{cm}$$

од каде што наоѓаме дека $d_2 = 3\,\text{cm}\cdot 2 = 6\,\text{cm}$.

Плоштината на ромбот изнесува

$$P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}=\frac{8\,\text{cm}\cdot 6\,\text{cm}}{2}=24\,\text{cm}^2.$$



црт. 3

Задача 3

Пресметај колку метри жица е потребно за да се загради нива во форма на ромб со плоштина 36 dam², ако една негова дијагонала е 9 dam.

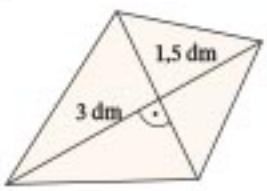
Задача 4

Пресметај колку плочки во форма на квадрат со страна 60 cm се потребни за да се поплочи плоштад кој има форма на делтоид. Двете подолги страни на плоштадот се 50 m и зафаќаат агол од 60°, а помалите страни зафаќаат прав агол.

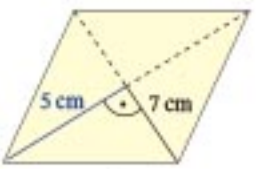
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај ја плоштината на четириаголниците дадени на цртеж 4:

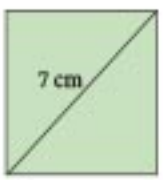
а)



б)



в)



црт. 4

2. Пресметај ја висината на ромб чии дијагонали се долги 16 cm и 12 cm.

3. Плоштината на делтоид е 9 dm^2, а едната негова дијагонала е 1,5 dm. Колку е другата дијагонала на делтоидот?

4. Делтоид и квадрат имаат еднакви плоштини. Пресметај ја дијагоналата на квадратот, ако дијагоналите на делтоидот се 16 cm и 4 cm.

5. Теа сака да направи украсен плакат во форма на делтоид со страни долги 28 cm и 46 cm. Едната дијагонала, што не е оска на симетрија, е долга 35 cm. Колкава е плоштината на плакатот?
   Забелешка: За пресметување на квадратен корен користи калкулатор.

6. Учениците од едно основно училиште решиле да дизајнираат мини соларен панел за училиштето. Секоја соларна плочка е во форма на ромб со дијагонали 80 cm и 60 cm.
   а) Ако за покривање на покривот на училишниот павилјон се потребни 250 плочки, колкава е вкупната површина што ќе ја покријат сите плочки?
   б) Ако еден метар квадратен од покриената површина со соларни плочки создава енергија од 15 Wh дневно, колку енергија ќе се создаде од вкупната површина за еден ден?

Истражување

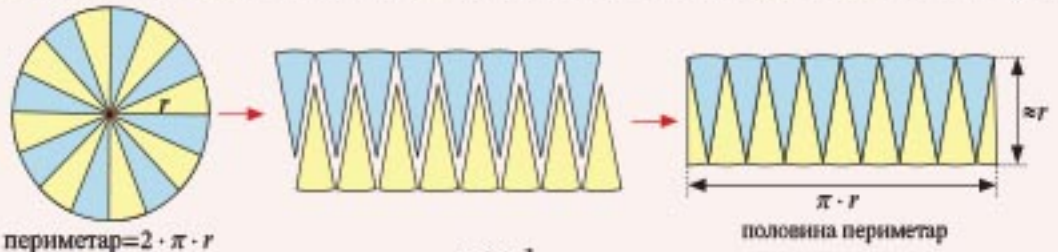
1. На милиметарска хартија нацртај 2 отсечки кои се сечат под прав агол. Потоа нивните крајни точки земи ги за темиња на четириаголник.
   а) Пресметај ја плоштината на четириаголникот со броење на квадратчињата од милиметарската хартија.
   б) Пресметај ја плоштината со формулата за четириаголник со заемно нормални дијагонали. Спореди ги двата резултати. Што забележуваш?
   в) Нацртај и други четириаголници на милиметарска хартија. Пресметај ја нивната плоштина со броење на квадратчињата од милиметарската хартија. Направи проверка со пресметување според формулата за плоштината на четириаголник со заемно нормални дијагонали.

2. Објасни како може да се пресмета плоштина на трапезоид со нормални дијагонали со делење на трапезоидот на два триаголника?

10. ПЛОШТИНА НА КРУГ

Активност

Исечи круг од хартија, подели го на 16 еднакви делови, а потоа состави форма како на цртеж 1.



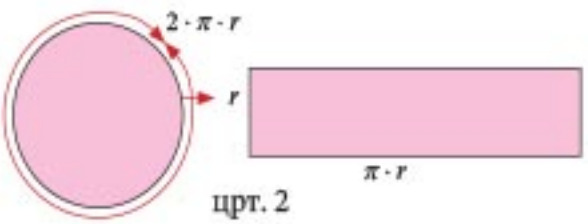
црт. 1

На што те потсетува добиената форма? Таа е еднаквоплоштна со кругот.
Како ќе ја определиш нејзината плоштина?

Во секојдневниот живот многупати се среќаваме со потребата да пресметаме плоштина на круг или негови делови.

Скенирај го кодот и види уште еден начин да стигнеш до формулата за плоштина на круг.

Да замислиме дека круг со радиус r е поделен, на пример, на 1000 еднакви исечоци кои ќе ги наредиме како погоре. Добиената форма ќе биде уште „поблиску“ до правоаголник, па нејзината плоштина ќе биде $P \approx \pi r \cdot r = \pi r^2$ (црт. 2).



црт. 2

Плоштината на круг е еднаква на производот од бројот π и квадратот од неговиот радиус.

Според тоа, плоштината на круг P се пресметува според формулата:

$$P = \pi r^2,$$

каде што r е радиусот на кругот (црт. 3).



црт. 3

Пример 1

Пресметај ја плоштината на круг со радиус 4 cm.

Со замена на дадените вредности во формулата за пресметување на плоштина на круг, добиваме

$$P = \pi r^2 \approx 3{,}14 \cdot (4\text{ cm})^2 = 50{,}24\text{ cm}^2.$$

Многу често запишуваме и $P = \pi r^2 = (4\text{ cm})^2 \cdot \pi = 16\pi\text{ cm}^2$.

Задача 1

Пресметај ја плоштината на круг со: а) радиус 1 dm, б) радиус 3,2 m, в) дијаметар 10 cm.

Активност

Како можеш од формулата $P = \pi r^2$ да го пресметаш радиусот r, ако е дадена плоштината P?

Пример 2

Пресметај го дијаметарот на круг со плоштина $P = 113{,}04\ \text{cm}^2$.

Со помош на формулата за пресметување на плоштина на круг наоѓаме дека

$$r = \sqrt{\frac{P}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{113{,}04\,\text{cm}^2}{3{,}14}} = \sqrt{36\,\text{cm}^2} = 6\ \text{cm}.$$

Тогаш за дијаметарот добиваме $d = 2r \approx 2 \cdot 6\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$.

Задача 2

Пресметај го дијаметарот на тава за палачинки, ако плоштината на една палачинка испечена во тавата е 1962,5 cm².

Пример 3

Пресметај ја плоштината на круг со периметар $L = 4\pi$ cm.

Од формулата за должина на кружница $L = 2r\pi$, наоѓаме дека $r = \frac{L}{2\pi} = \frac{4\pi\,\text{cm}}{2\pi} = 2\ \text{cm}$.

Тогаш за плоштината на кругот добиваме $P = \pi \cdot r^2 = (2\ \text{cm})^2 \cdot \pi = 4\pi\ \text{cm}^2$.

Задача 3

Пресметај ја плоштината на круг со периметар 25,12 dm.

Задача 4

Пресметај го периметарот на круг со плоштина 314 dm².

Задача 5

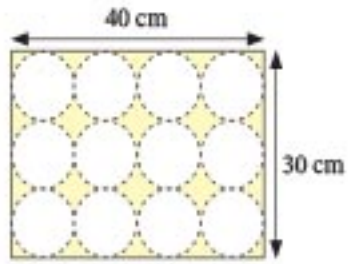
Колку пати треба да се зголеми радиусот на еден круг за неговата плоштина да се зголеми 25 пати?

Задача 6

Кога ќе пукне воден балон на земја, тој создава круг од вода со дијаметар приближно 26 cm. Пресметај ја приближно плоштината на површината на земјата што е мокра.

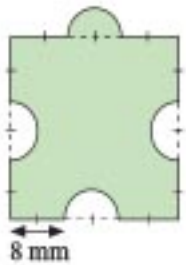
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Колку пати ќе се зголеми плоштината на круг, ако неговиот радиус се зголеми:
   а) 3 пати, б) 7 пати?
2. Кружна маса со дијаметар 80 cm е прекриена со квадратен чаршав со плоштина 1600 cm². Дали масата е целосно покриена со чаршафот?
3. Дадени се два круга со радиуси 6 cm и 4 cm. Најди го радиусот на кругот чија плоштина е еднаква на:
   а) збирот од плоштините на двата круга,
   б) разликата од плоштините на двата круга.
4. Магаре е врзано за столб со јаже долго 3,6 m. На колкава површина може да се движи магарето?
5. Две кружници со радиуси $r_1 = 5{,}4$ cm и $r_2 = 3$ cm се допираат одвнатре. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината што е зафатен меѓу двете кружници.
6. Јан работи во слаткарница каде секојдневно се прават колачи во кружна форма кои се отсекуваат од парче тесто 30 cm на 40 cm како што е покажано на цртеж 4. Пресметај ја плоштината на неотсечениот дел од парчето тесто.



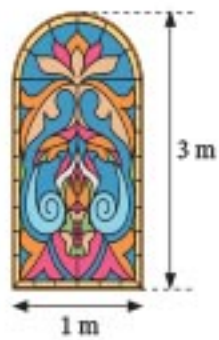
црт. 4

7. Пресметај ја плоштината на парче од сложувалка (црт. 5) и заокружи го решението на најблискиот квадратен милиметар.



црт. 5

8. Цената на витражното стакло е 1150 денари за 1 m². Маја е архитект и дизајнира простор во кој поставува 4 прозорци со витраж (црт. 6). Буџетот со кој располага е 14 000 денари. Провери дали Маја има доволно средства за да го реализира својот проект.



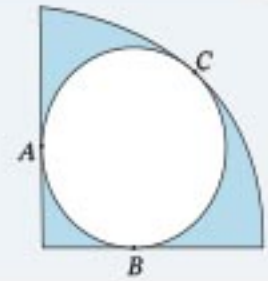
црт. 6

Истражување

Круг со радиус r е впишан во четвртина круг со радиус R, така што се допира во точките A, B и C (црт. 7)

а) Најди ја врската помеѓу радиусите R и r.

б) Најди го односот на плоштината на обоената форма спрема плоштината на белиот круг.



црт. 7

11. ПЛОШТИНА НА КРУЖЕН ИСЕЧОК, КРУЖЕН ОТСЕЧОК И КРУЖЕН ПРСТЕН

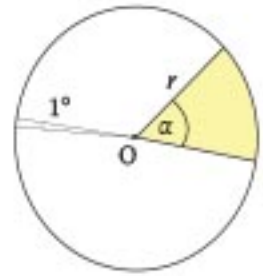
Активност

а) Нацртај два круга со произволен радиус. Во едниот нацртај кружен исечок, а во другиот кружен отсечок. Потоа, обележи ги централните агли и соодветните кружни лакови.

б) Нацртај две концентрични кружници и обој го просторот меѓу нив. Именувај ја добиената форма.

Кружен исечок во круг со радиус r, чиј централен агол е $1°$ (цртеж 1) има плоштина еднаква на $\frac{1}{360}$ од плоштината на кругот, односно

$$P_{1°}=\frac{\pi r^2}{360}=\frac{\pi r^2\cdot 1°}{360^0}.$$



црт. 1

Кружен исечок во круг со радиус r, чиј централен агол е $2°$ има два пати поголема плоштина од кружен исечок чиј централен агол е $1°$, односно $P_{2°}=P_{1°}\cdot 2$. Според тоа, добиваме дека

$$P_{2°}=\frac{\pi r^2\cdot 1°}{360^0}\cdot 2=\frac{\pi r^2\cdot 2°}{360^0}.$$

Размислувајќи на ваков начин, може да заклучиме дека кружен исечок во круг со радиус r, чиј централен агол е има плоштина

$$P=\frac{\pi r^2\alpha}{360°}.$$

Знаеме дека должината на лакот, што му одговара на кружниот исечок е $l=\frac{\pi r\alpha}{180°}$, па формулата за пресметување на плоштина на кружен исечок може да се запише во облик

$$P=\frac{\pi r\alpha}{180°}\cdot\frac{r}{2}=\frac{l\cdot r}{2}.$$

Плоштината на кружен исечок е еднаква на полупроизводот од должината на соодветниот кружен лак и радиусот.

Според тоа, плоштината на кружен исечок P се пресметува според формулата:

$$P=\frac{l\cdot r}{2},$$

каде што l е должината на соодветниот кружен лак и r е радиусот на кругот.

Пример 1

Пресметај ја плоштината на кружен исечок што одговара на централен агол 57°, во круг со радиус 6 cm.

Со замена на мерните броеви на r и α во формулата за кружен исечок, добиваме

$$P=\frac{\pi r^2\alpha}{360^\circ}\approx\frac{3{,}14\cdot(6\,\text{cm})^2\cdot 57^\circ}{360^\circ}=17{,}898\ \text{cm}^2.$$

Задача 1

Пресметај ја плоштината на кружен исечок, ако $r=5$ cm и $l=6{,}8$ cm.

Активност

Како можеш од формулата $P=\frac{\pi r^2\alpha}{360^\circ}$ да го пресметаш:

а) радиусот r, ако се дадени P и α, б) централниот агол α, ако се дадени r и P?

Пример 2

Кружен исечок со радиус 7 cm има плоштина 64,2 cm². Пресметај ја големината на централниот агол на исечокот.

Според формулата за пресметување на плоштина на кружен исечок, за аголот α добиваме

$$\alpha=\frac{360^\circ P}{\pi r^2}\approx\frac{360^\circ\cdot 64{,}2\,\text{cm}^2}{3{,}14\cdot(7\,\text{cm})^2}=150^\circ.$$

Задача 2

Во пекарницата „Слатка точка“ се продаваат парчиња пита во форма на кружен исечок. Целата пита има кружна форма со радиус 20 cm и се сече на 8 еднакви парчиња.

а) Колкав е централниот агол на едно парче пита?

б) Колкава е плоштината на едно парче пита?

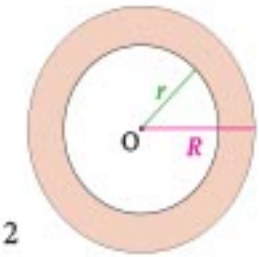
Задача 3

Колкав е радиусот на круг во кој на централен агол од 70° му одговара исечок со плоштина 15,26 cm²?

На цртеж 2 се прикажани два концентрични круга. Да го означиме радиусот на големиот круг со R и радиусот на малиот круг со r.

Плоштината на кружниот прстен ќе ја добиеме ако од плоштината на големиот круг ја одземеме плоштината на малиот круг, односно

$$P = \pi R^2 - \pi r^2, \quad P = \pi\left(R^2 - r^2\right).$$



црт. 2

Пример 3

Пресметај ја плоштината на кружен прстен, ако радиусите на кружниците кои го заградуваат се $R = 9$ cm и $r = 5{,}7$ cm.

Според формулата за плоштина на кружен прстен, наоѓаме дека

$$P = \pi(R^2 - r^2) \approx 3{,}14 \cdot ((9\text{cm})^2 - (5{,}7\text{cm})^2) = 152{,}3214\text{cm}^2.$$

Задача 4

Во средината на училишниот двор има фонтана со кружна форма. Околу фонтаната учениците ќе направат цветна леа во форма на кружен прстен. Надворешниот радиус на леата е 3 m, а внатрешниот радиус (до работ на фонтаната) е 1,5 m.

а) Пресметај ја плоштината на цветната леа.

б) Ако за уредување на 1 m^2 потребни се 5 растенија, колку растенија ќе бидат потребни за целата леа?

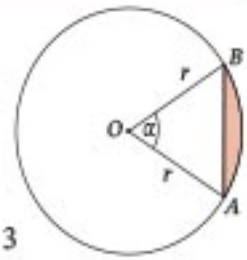
Задача 5

Должините на две концентрични кружници се 4π cm и 10π cm. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен заграден со кружниците.

Задача 6

Две кружници со радиуси $r_1 = 5{,}4$ cm и $r_2 = 3$ cm се допираат однатре. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината заграден со кружниците.

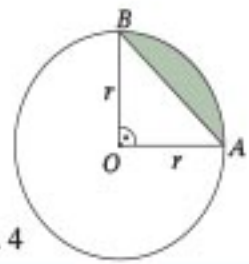
Плоштината на кружен отсечок може да се пресмета како разлика на плоштината на кружниот исечок со централен агол α со плоштината на рамнокракиот триаголник ABO (црт. 3).



црт. 3

Пример 4

Пресметај ја плоштината на кружниот отсечок со тетива AB, ако централен агол $\alpha = 90°$ и радиус на кругот е $r = 13$ cm (црт. 4).



црт. 4

Плоштината на кружниот отсечок изнесува

$$P_{\text{отсечок}} = P_{\text{исечок}} - P_{\triangle ABO} \approx \frac{3{,}14 \cdot (13\text{cm})^2 \cdot 90°}{360°} - \frac{13\text{cm} \cdot 13\text{cm}}{2} = 48{,}165 \text{ cm}^2.$$

Задача 7

Пресметај ја плоштината на кружен отсечок во круг со радиус $r = 9$ cm, ако должината на соодветниот кружен лак е $l = 14{,}13$ cm.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

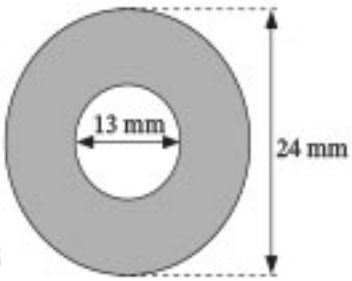
1. Пресметај плоштината на кружен исечок, ако се дадени:
а) $r = 3$ cm и $\alpha = 30°$, б) $r = 4{,}5$ dm и $\alpha = 45° 30'$, в) $r = 5$ cm и $l = 6{,}8$ cm.

2. Колкав дел од плоштината на еден круг претставува кружен исечок чиј централен агол е:
а) 45°, б) 60°, в) 90°, г) 120°?

3. Плоштината на кружен исечок претставува:
а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{2}{3}$, в) $\frac{3}{4}$, г) $\frac{5}{9}$,
од плоштината на кругот. Колкав е централниот агол што одговара на кружниот исечок?

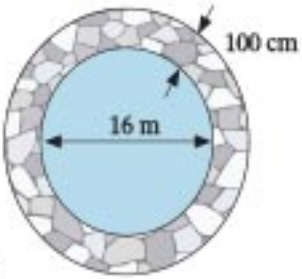
4. Плоштините на два концентрични круга се 4π cm^2 и 36π cm^2. Пресметај ја ширината на кружниот прстен.

5. Пресметај ја плоштината на горната површина на машинскиот елемент даден на цртеж 5.



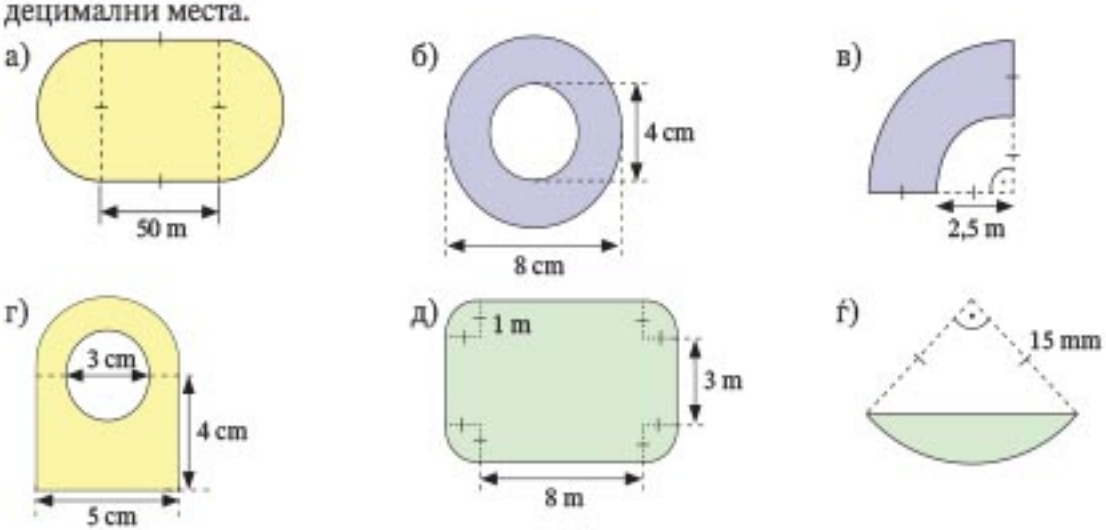
црт. 5

6. Мало кружно езерце има дијаметар 16 m (црт. 6).
а) Пресметај ја плоштината на пластика потребна за обложување на дното на езерцето.
б) Околу езерцето треба да се постави лента со ширина 100 cm, исполнета со камчиња.
Пресметај ја плоштината на површината покриена со камчиња.



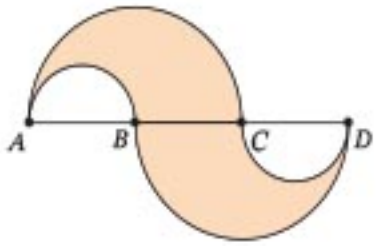
црт. 6

7. Пресметај ја плоштината на формите дадени на цртеж 7. Заокружи ги решенијата на 2 децимални места.

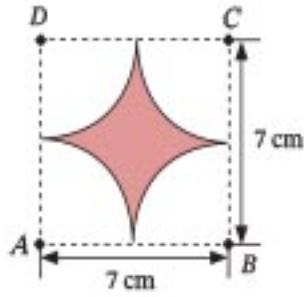


црт. 7

8. Четири тима ученици изработуваат предлог амблем за училишните униформи. Секоја група предлага свој дизајн. Амблемот треба да се изработи од текстил и да се направи што е можно поекономичен. Кој амблем ќе се изработи со најмала потрошувачка на текстил? Предлози и појаснувања од тимовите:



црт. 8а



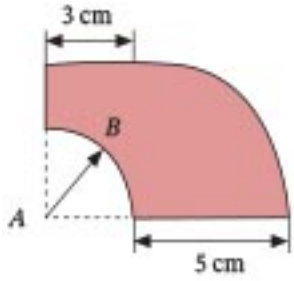
црт. 8б

Тимот 1 го изработува амблемот прикажан на цртеж 8а, под услов $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 3\,\text{cm}$.

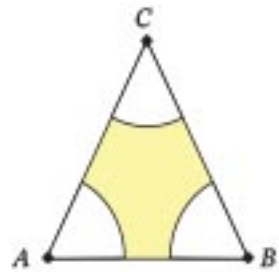
Тимот 2 го изработува амблемот прикажан на цртеж 8б, под услов $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 7\,\text{cm}$.

Тимот 3 го изработува амблемот прикажан на цртеж 8в, под услов дека поголемиот кружен лак има радиус 5 cm, а помалиот кружен лак има радиус $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$.

Тимот 4 го изработува амблемот прикажан на цртеж 8г, под услов дека кружните лакови со центри во теминьата на рамностраниот триаголник ABC со страна 7 cm, имаат радиуси 2 cm.



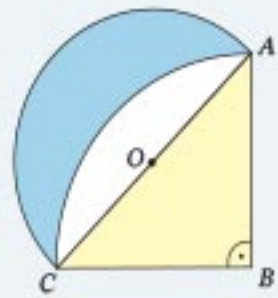
црт. 8в



црт. 8г

Истражување

Покажи дека плоштината на формата заградена со двата кружни лака, обоена со сина боја на цртеж 9, е еднаква на плоштината на рамнокракиот правоаголен триаголник ACB, обоена со жолта боја.



црт. 9

12. ПЛОШТИНА НА ПРИЗМА И ПИРАМИДА

Плоштина на призма

Активност

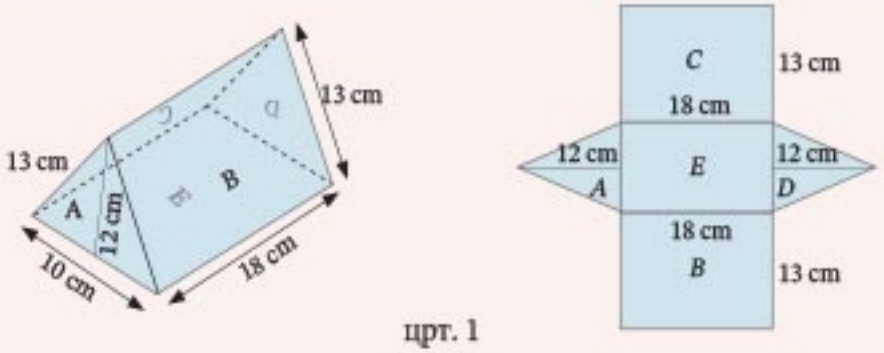
Разгледај ги призмата и нејзината мрежа дадени на цртеж 1.

а) Од кои многуаголници е составена мрежата на триаголната призма?

б) Воочи дека ѕидот A на призмата е складен со ѕидот D, B е складен со C, E не е складен со ниту еден од останатите ѕидови на призмата.

в) Што претставува збирот од плоштините на сите многуаголници од мрежата на призмата? Како може да се определи плоштината на призмата?

г) Пресметај ја плоштината на дадената призма со помош на нејзината мрежа.



црт. 1

Од дефиницијата за призма јасно е дека нејзината плоштина може да се пресмета како збир од плоштините на сите нејзини ѕидови.

Плоштината на призма е збир од плоштините на двете основи и плоштината на бочната површина.

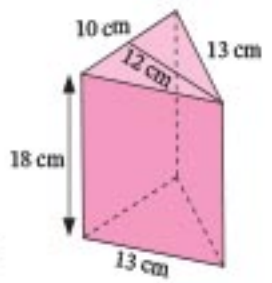
Според тоа, плоштината на призма P се пресметува според формулата:

$$P = 2B + M,$$

каде што B е плоштина на основата и M е плоштина на бочната површина на призмата.

Пример 1

Пресметај ја плоштината на призмата дадена на цртеж 2.



црт. 2

Основата на призмата е рамнокрак триаголник со основа 10 cm и соодветна висина 12 cm, па нејзината плоштина изнесува

$$B = \frac{10\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm}}{2} = 60\ \text{cm}^2.$$

Бочната површина на призмата е составена од 3 бочни ѕидови кои се правоаголници. Два од нив се складни, со димензии 13 cm и 18 cm и третиот со димензии 10 cm и 18 cm. Според тоа, плоштината на бочната површина изнесува

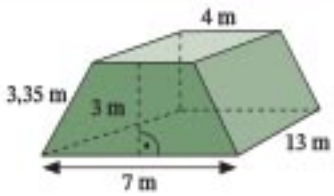
$$M = 2 \cdot 13\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} + 10\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} = 468\,\text{cm}^2 + 180\,\text{cm}^2 = 648\ \text{cm}^2.$$

Плоштината на призмата изнесува

$$P = 2B + M = 2 \cdot 60\,\text{cm}^2 + 648\,\text{cm}^2 = 120\,\text{cm}^2 + 648\,\text{cm}^2 = 768\ \text{cm}^2.$$

Пример 2

Пресметај плоштина на призмата дадена на цртеж 3.



црт. 3

Основата на призмата е трапез со плоштина

$$B = \frac{7\,\text{m} + 4\,\text{m}}{2} \cdot 3\,\text{m} = 16{,}5\,\text{m}^2.$$

Плоштината на бочната површина изнесува

$$M = 7\,\text{m} \cdot 13\,\text{m} + 4\,\text{m} \cdot 13\,\text{m} + 2 \cdot 3{,}35\,\text{m} \cdot 13\,\text{m} = 230{,}1\,\text{m}^2$$

Според формулата за пресметување на плоштина на призма добиваме

$$P = 2B + M = 2 \cdot 16{,}5\,\text{m}^2 + 230{,}1\,\text{m}^2 = 263{,}1\,\text{m}^2.$$

Задача 1

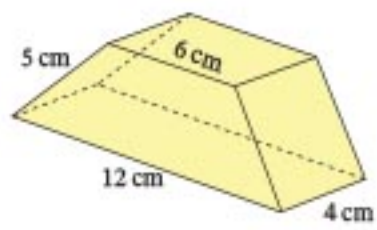
Пресметај ја плоштината на призма со основа правоаголен триаголник со катети $a = 5$ cm и $b = 12$ cm, ако висината $H = 17{,}4$ cm.

Задача 2

Пресметај плоштина на четириаголна призма со основа ромб чии дијагонали се $d_1 = 8$ cm и $d_2 = 6$ cm, ако висината $H = 0{,}74$ dm.

Задача 3

Кутија има форма и димензии како на цртеж 4.
Пресметај ја плоштината на картонот
што е потребен за да се направи кутијата.



црт. 4

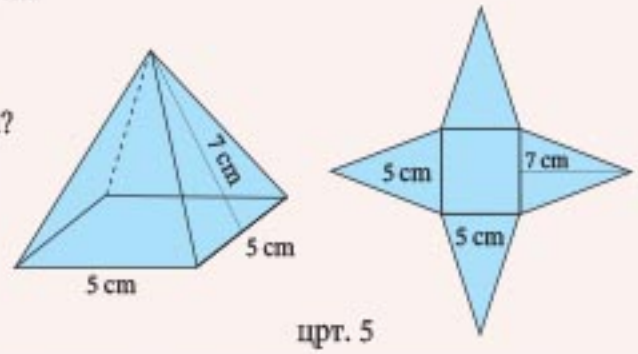
Плоштина на пирамида

Активност

Разгледај ги пирамидата и нејзината мрежа дадени на цртеж 5.

а) Од кои многуаголници е составена мрежата на четириаголната пирамида?

б) Што претставува збирот од плоштините на сите многуаголници од мрежата на пирамидата? Како може да се определи плоштината на пирамидата?



црт. 5

в) Пресметај ја плоштината на дадената пирамида со помош на нејзината мрежа.

Од дефиницијата за пирамида, а воопшто и од мрежата на пирамида се воочува дека нејзината плоштина може да се пресмета како збир од плоштините на сите ѕидови.

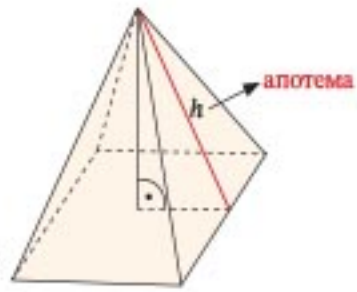
Плоштината на пирамида е збир од плоштината на основата и плоштината на бочната површина.

Според тоа, плоштината на пирамида P се пресметува според формулата:

$$P = B + M,$$

каде што B е плоштина на основата и M е плоштина на бочната површина на пирамидата.

Висината на бочен ѕид спуштена од врвот на правилна пирамида кон соодветниот основен раб се вика **апотема на пирамидата** (црт. 6).



црт. 6

Пример 3

Пресметај ја плоштината на правилна четириаголна пирамида со основен раб $a = 12$ cm и апотема $h = 16$ cm.

Основата на пирамидата е квадрат чија плоштина на основата е

$$B = a^2 = (12\text{ cm})^2 = 144\text{ cm}^2.$$

Бочната површина се состои од 4 рамнокраки триаголници со основа 12 cm и висина 16 cm. Нејзината плоштина изнесува

$$M = 4 \cdot \frac{ah}{2} = 2 \cdot 12\text{cm} \cdot 16\text{cm} = 384\ \text{cm}^2.$$

Според формулата за пресметување на плоштина на пирамида, наоѓаме дека

$$P = B + M = 144\text{ cm}^2 + 384\text{ cm}^2 = 528\text{ cm}^2.$$

Пример 4

Плоштината на бочната површина на правилна триаголна пирамида со основен раб $a = 12$ cm изнесува $M = 144$ cm². Пресметај ја апотемата на пирамидата.

Бочната површина на триаголната пирамида се состои од 3 складни рамнокраки триаголници со основа $a = 12$ cm и апотема h што треба да се пресмета. Плоштината на бочната површина е $M = 3 \cdot \frac{ah}{2}$ од каде наоѓаме дека апотемата изнесува

$$h = \frac{2M}{3a} = \frac{2 \cdot 144\,\text{cm}^2}{3 \cdot 12\,\text{cm}} = \frac{288\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}} = 8\ \text{cm}.$$

Задача 4

Во продавница за декорации се продава стаклен украс во форма на шестаголна пирамида. Вкупната плоштина на украсот изнесува 900 cm². Секој бочен ѕид има плоштина од 100 cm².

а) Колку бочни ѕидови има пирамидата?

б) Колкава е плоштината на основата?

в) Пресметај ја апотемата, ако основата е правилен шестаголник со раб 10 cm.

Пример 5

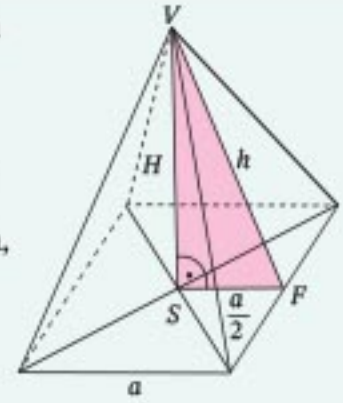
Пресметај ја плоштината на правилна четириаголна пирамида со основен раб $a = 5$ cm и висина $H = 6$ cm.

Од правоаголниот триаголник FSV, со помош на Питагоровата теорема, ќе ја пресметаме апотемата (црт. 7)

$$h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(6\,\text{cm})^2 + (2{,}5\,\text{cm})^2} = \sqrt{42{,}25\,\text{cm}^2} = 6{,}5\ \text{cm}.$$

Според формулата за пресметување на плоштина на пирамида, наоѓаме дека

$$P = B + M = a^2 + 4\frac{ah}{2} = (5\,\text{cm})^2 + 2 \cdot 5\,\text{cm} \cdot 6{,}5\,\text{cm} = 90\ \text{cm}^2.$$



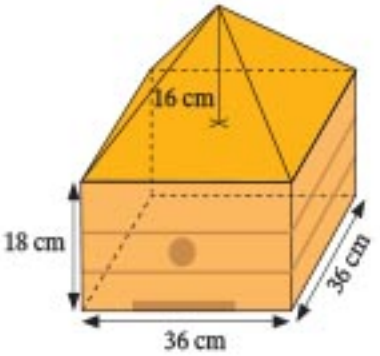
црт. 7

Задача 5

Еден шатор за кампување има форма на правилна четириаголна пирамида. Висината на шаторот е 3 m, а апотемата е 5 m. Колку квадратни метри земјиште е потребно да се постави шаторот?

Задача 6

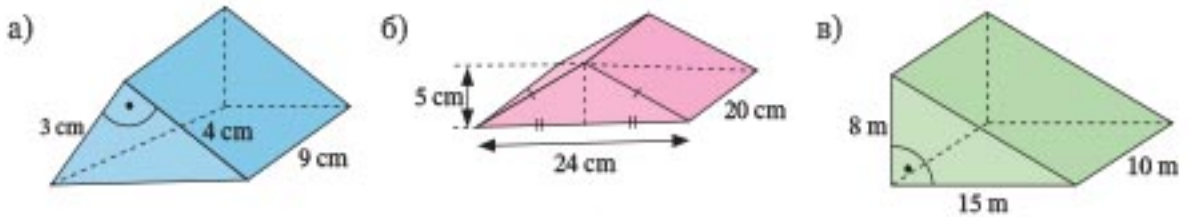
Пчелар направил сандак за пчели во форма на квадар со капак во форма на пирамида (црт. 8). Целиот сандак треба да се обои со специјална водоотпорна боја за заштита од дожд. Колку кантички со боја ќе бидат потребни за да се обои целата надворешна површина на сандакот, ако со една кантичка боја може да се обојат 150 cm²?



црт. 8

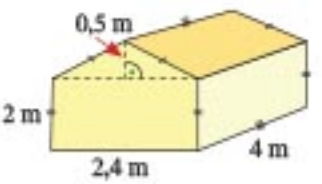
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Бочната плоштина на правилна шестаголна призма е 660 cm², а висината е 10 cm. Пресметај ја плоштината на основата.
2. Пресметај ги плоштините на призмите дадени на цртеж 9:



црт. 9

3. Прикажаната ботаничка градина на цртеж 10 е направена од пластична фолија која чини 350 денари по квадратен метар. Колку вкупно чини пластичната фолија?

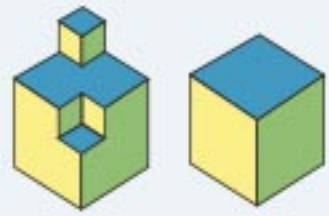


црт. 10

4. Запиши ја формулата за пресметување на плоштината на правилна четириаголна:
   а) призма, б) пирамида.
5. Амбалажа за чоколадно млеко која е направена од картон има форма на тетраедар со раб 10 cm.
   а) Пресметај ја апотемата,
   б) Колкава е плоштината на картонот за изработка на амбалажата?
6. Покрив има форма на правилна шестаголна пирамида со апотема 2 m и основен раб 2 m. Колку парчиња ламарина се потребни за покривот, ако плоштината на едно парче е 2 m²?
7. Учениците во твоето училиште учествуваат во натпревар за дизајн на еколошка туристичка атракција. Тимот треба да изработи павилјон во форма на пирамида што ќе биде изграден од рециклирано стакло. Пирамидата има основа правилен шестаголник со страна 2 m, а апотемата е 3 m. Колкава ќе биде цената за употребеното стакло ако квадратен метар чини 1200 денари?

Истражување

1. Делот од коцката што е извлечен е поставен над неа (црт. 11). Спореди ги плоштините на двете 3Д форми. Дали се еднакви? Образложи го одговорот.



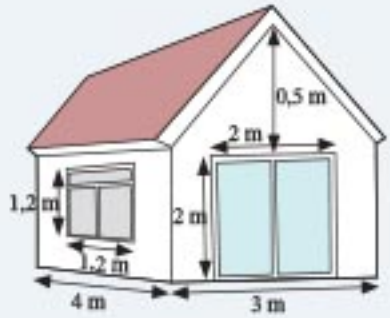
црт. 11

2. За да се направи мала куќичка за чување на алати потребни се дрвени штици, стакло и лим. Димензиите на куќичката се како на цртеж 12, ѕидовите и покривот се од дрво, вратата е од лим, а на прозорецот се става само стакло.

Пресметај колку треба да биде буџетот за материјал за да се изгради куќичката.

Информирај се за цените во соодветни продавници или на интернет.

Истражувај кои други материјали се потребни (на пример, за спојување на градежните елементи, за премачкување и заштита и сл.).



црт. 12

13. ВОЛУМЕН НА ПРИЗМА И ПИРАМИДА

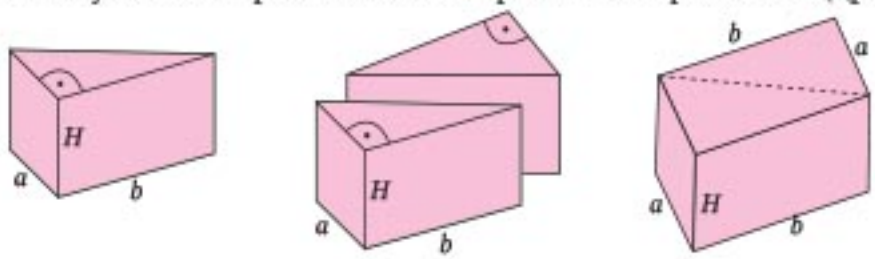
Волумен на призма

Активност

Најди го волуменот на кутија за житарки или некој друг предмет во форма на квадар од секојдневниот живот. Што претставува величината волумен?

Да ги проследиме чекорите кои водат до формулата за пресметување на волумен на призма.

1. Да го најдеме волуменот на призма со основа правоаголен триаголник (црт. 1).



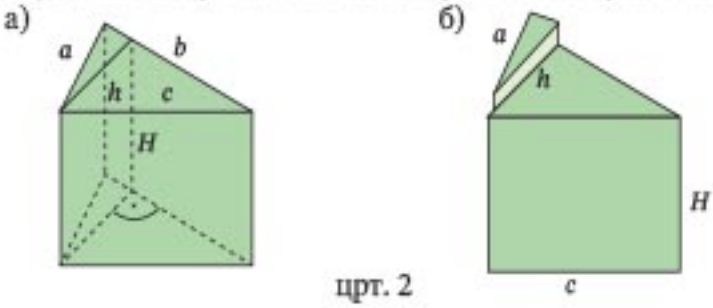
црт. 1

Според цртеж 1 волуменот на дадената триаголна призма може да се пресмета како половина од волуменот на квадар со димензии a, b и H, односно

$$V = \frac{a \cdot b \cdot H}{2} = \frac{a \cdot b}{2} H = B \cdot H$$

каде што B е плоштина на основата на призмата (правоаголниот триаголник), а H е висината на призмата.

2. Да го најдеме волуменот на призма со основа произволен триаголник (црт. 2).

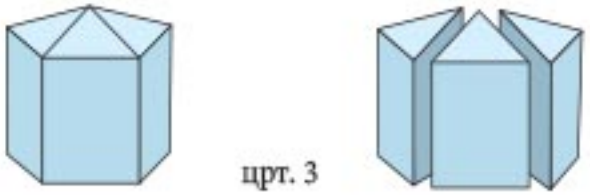


црт. 2

Овој случај го сведуваме на претходниот, со тоа што повлекуваме една од висините на основата. На тој начин добиваме два правоаголни триаголници со една заедничка катета. Сега триаголната призма е разделена на две триаголни призми со основи правоаголни триаголници, па нејзиниот волумен ќе биде збир од волумените на двете призми

$$V = V_1 + V_2 = B_1 \cdot H + B_2 \cdot H = (B_1 + B_2) \cdot H = B \cdot H.$$

3. Да го најдеме волуменот на призма со основа произволен многуаголник (црт. 3).



црт. 3

Во случај кога основата на призмата е произволен многуаголник, ги повлекуваме сите дијагонали од едно теме на многуаголникот. На тој начин многуаголникот е разделен на конечно многу триаголници. За секој од добиените триаголници ги применуваме постапките кои претходно ги разгледавме. Слично како погоре, добиваме дека

$$V = B \cdot H.$$

Волуменот на призма е еднаков на производот од плоштината на основата и висината на призмата.

Според тоа, волуменот на призма V се пресметува според формулата:

$$V = B \cdot H,$$

каде што B е плоштина на основата и H е висина на призмата.

Пример 1

Пресметај го волуменот на призма со основа триаголник со страна $a = 4$ cm и висина кон неа $h = 5$ cm, ако висината на призмата е $H = 6$ cm.

Според формулата за пресметување на волумен на призма, добиваме дека

$$V = B \cdot H = \frac{a \cdot h}{2} \cdot H = \frac{4\text{cm} \cdot 5\text{cm}}{2} \cdot 6\text{cm} = 60 \text{ cm}^3.$$

Задача 1

Пресметај го волуменот на призмите од цртеж 4:



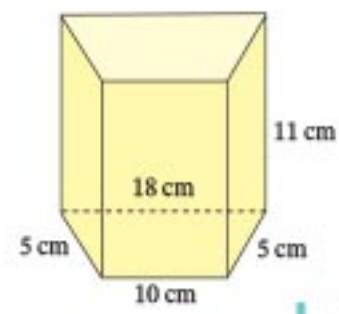
црт. 4

Задача 2

Амбалажа од чоколадо има форма на правилна четириаголна призма со основен раб долг 5 cm и висина 18 cm. Колку изнесува волуменот на амбалажата?

Пример 2

Пресметај го волуменот на четириаголна призма со основа рамнокрак трапез со основи $a = 18$ cm, $b = 10$ cm и крак $c = 5$ cm, ако висината $H = 11$ cm (црт. 5).



црт. 5

Ќе ја определиме најпрво висината на трапезот, кој е основа на призмата (црт. 6)

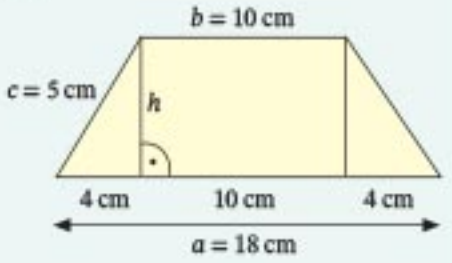
$$h=\sqrt{(5\,\text{cm})^2-(4\,\text{cm})^2}=\sqrt{25\,\text{cm}^2-16\,\text{cm}^2}=\sqrt{9\,\text{cm}^2}=3\,\text{cm}.$$

Според формулата за пресметување на плоштина на трапез, за плоштината на основата добиваме

$$B=\frac{a+b}{2}h=\frac{18\,\text{cm}+10\,\text{cm}}{2}\cdot 3\,\text{cm}=42\ \text{cm}^2.$$

Според формулата за пресметување на волумен на призма, добиваме

$$V=B\cdot H=42\ \text{cm}^2\cdot 11\ \text{cm}=462\ \text{cm}^3.$$



црт. 6

Задача 3

Пресметај го волуменот на призма со основа делтоид со дијагонали $d_1=24$ cm и $d_2=13$ cm, ако висината е $H=7,2$ cm.

Активност

Како можеш од формулата $V=B\cdot H$ да ја пресметаш:
а) плоштината на основата B, ако се дадени V и H, б) висината H, ако се дадени V и B?

Пример 3

Во мал аквариум во форма на правилна четириаголна призма истурени се 8,4 l вода до висина $H=2,1$ dm. Колку е основниот раб на аквариумот?

Основата на правилна четириаголна призма е квадрат. Според формулата за пресметување на волумен на призма, добиваме дека

$$V=B\cdot H=a^2\cdot H$$

Оттука, за должината на основниот раб, наоѓаме дека

$$a=\sqrt{\frac{V}{H}}=\sqrt{\frac{8,4\,\text{dm}^3}{2,1\,\text{dm}}}=\sqrt{4\,\text{dm}^2}=2\,\text{dm}\qquad (1\ l=1\ \text{dm}^3).$$

Задача 4

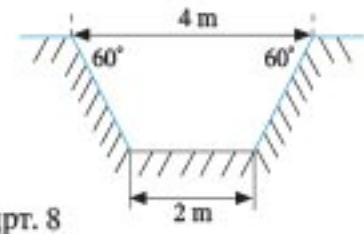
На цртеж 7 е даден аквариум со неговите димензии. Површината на водата во аквариумот е 5 cm подолу од висината на аквариумот.
Колку литри вода има во аквариумот?



црт. 7

Задача 5

При изградба на пат на терен кој изобилува со вода, потребно било да се ископа канал во кој ќе се одлева водата. Неговиот напречен пресек е даден на цртеж 8. Колку кубни метри земја се извадени при копање на каналот, ако тој е долг 2 km?



црт. 8

Волумен на пирамида

Активност

Изработи од картон модели на призма и пирамида со складни основи и еднакви висини. Потоа наполни ја пирамидата со вода (песок, ориз или шеќер) и претури ја целата количина во призмата. Повтори ја постапката додека не ја наполниш призмата. Што забележуваш?

Волуменот на пирамида е еднаков на една третина од производот на плоштината на основата и висината на пирамидата.

Според тоа, волуменот на пирамида V се пресметува според формулата:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H,$$

каде што B е плоштина на основата и H е висината на пирамидата.

Пример 4

Колку метри кубни е волуменот на Кеопсовата пирамида која е висока 150 m, а основата ѝ е квадрат со страна долга 230 m?

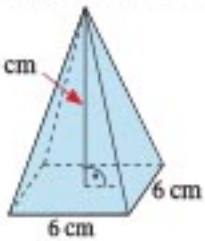
Според формулата за пресметување на волумен на пирамида, добиваме

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot (230\ \text{m})^2 \cdot 150\ \text{m} = 2645000\ \text{m}^3.$$

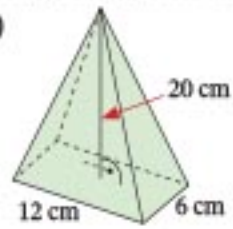
Задача 6

Пресметај го волуменот на пирамидите дадени на цртеж 9:

а)



б)



в)



црт. 9

Активност

Како можеш од формулата $V=\frac{1}{3}B\cdot H$, да ја пресметаш:

а) плоштината на основата B, ако се дадени V и H, б) висината H, ако се дадени V и B?

Пример 5

Пресметај ја висината на пирамида со волумен 12 cm³ и плоштината на основата 4 cm².

Од формулата за пресметување на волумен на пирамида, наоѓаме дека

$$H=\frac{3\cdot V}{B}=\frac{3\cdot 12\ \text{cm}^3}{4\ \text{cm}^2}=9\ \text{cm}.$$

Задача 7

Пресметај ја плоштината на основата на пирамида со волумен 8 cm³ и висина $H=2$ cm.

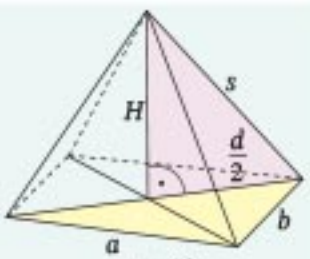
Пример 6

Пресметај го волуменот на пирамида со основа правоаголник со димензии $a=24$ cm и $b=32$ cm, ако бочниот раб е 25 cm.

Дијагоналата на основата на пирамидата изнесува

$$d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{576\ \text{cm}^2+1024\ \text{cm}^2}=\sqrt{1600\ \text{cm}^2}=40\ \text{cm}.$$

Од правоаголниот триаголник формиран од половина дијагонала на правоаголната основа, бочниот раб и висината на пирамидата, за висината на пирамидата се добива (цртеж 10)



црт. 10

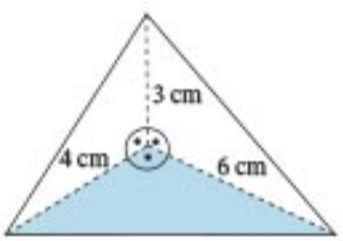
$$H=\sqrt{s^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}=\sqrt{(25\ \text{cm})^2-(20\ \text{cm})^2}=\sqrt{625\ \text{cm}^2-400\ \text{cm}^2}=\sqrt{225\ \text{cm}^2}=15\text{cm}.$$

Според формулата за пресметување на волумен на пирамида наоѓаме дека волуменот изнесува

$$V=\frac{BH}{3}=\frac{abH}{3}=\frac{24\ \text{cm}\cdot 32\ \text{cm}\cdot 15\ \text{cm}}{3}=3840\ \text{cm}^3$$

Задача 7

Столар отсекува парче во форма на триаголна пирамида од друго парче дрво, кое имало форма на квадар. Димензиите на отсеченото парче дрво се дадени на цртеж 11.
Најди го неговиот волумен.

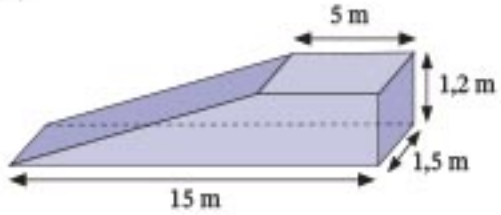


црт. 11

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

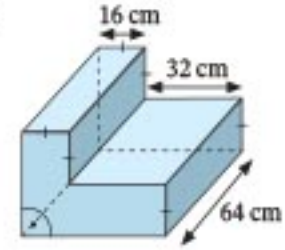
1. Пресметај го волуменот на бетон што треба да се искористи за изградба на:
а) рампата на цртеж 12а, б) скалите на цртеж 12б.

а)



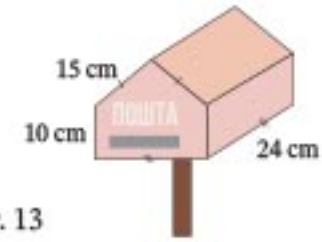
црт. 12а

б)



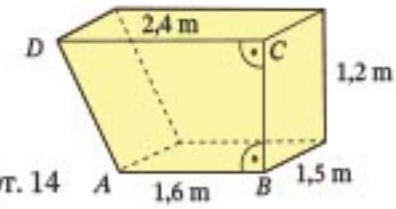
црт. 12б

2. а) Најди го волуменот на воздухот во поштенското сандаче (црт. 13).
б) Во сандачето се ставени три плика со димензии 23 cm на 12 cm на 5 mm. Колкав е волуменот на неискористениот простор во сандачето?



црт. 13

3. На цртеж 14 е даден контејнер за компостирање. Колку кубни метри компост собира контејнерот?



црт. 14

4. Колкав е волуменот на призма чија основа е рамнокрак трапез со страни $a = 7\frac{1}{2}$ cm, $b = 8\frac{1}{3}$ cm, $c = 2\frac{2}{3}$ cm, ако висината $H = 5$ cm?

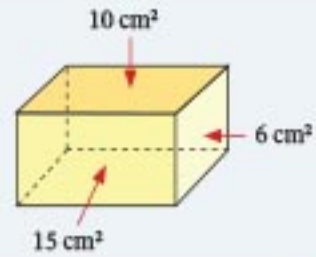
5. Волуменот на правилна четириаголна пирамида е 810 cm³, а висината е 30 cm. Најди го основниот раб на пирамидата.

6. Правилна четириаголна пирамида има висина $H = 6$ cm и апотема $h = 10$ cm. Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамидата.

7. Колку литри дождовница собира резервоар за вода во форма на пирамида, со основа правоаголник со димензии 2,4 m, 3,2 m и бочен раб 2,5 m?

Истражување

Најди го волуменот на квадарот на цртеж 15 ако се дадени плоштините на неговите ѕидови.



црт. 15

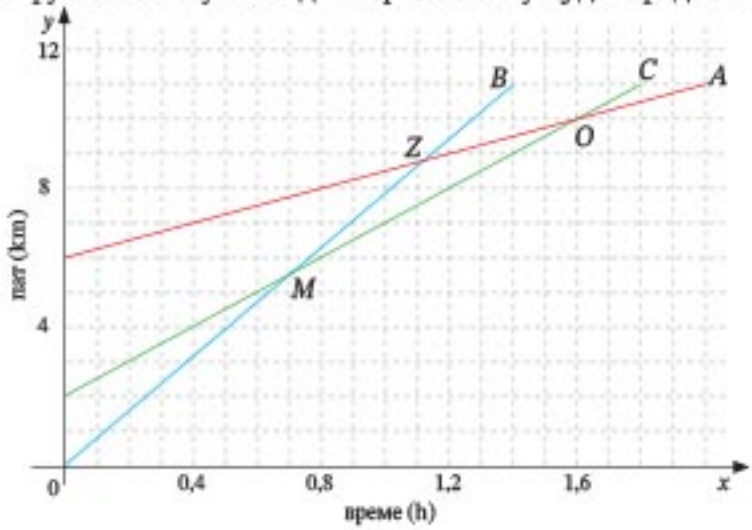
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Претвори: 10 години 9 месеци 20 дена 15 часа во:
а) години, б) месеци, в) денови, г) часови.

2. Мими има $12\frac{3}{4}$ години, а Еми има $9\frac{1}{6}$ години.
а) По колку години имала секоја од нив пред 10 месеци?
б) За колку години Мими е постара од Еми?

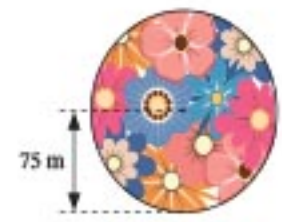
3. Нацртај график на кој ќе го прикажеш патот на еден камион кој од градот А поаѓа во 9 часот наутро, после два часа прави пауза од половина час и во 14 часот стигнува во градот Б кој е 250 km оддалечен од градот А. Таму останува 1 час. Потоа тргнува назад, вози без паузи и стигнува во градот А во 19 часот.

4. Три групи туристи, А, В и С одат во панорамско разгледување на градот со автобус. Точката М е историски музеј, точката Z е зоолошка градина, а точката О зграда на операта (црт. 1).
а) Колку се оддалечени зградата на операта и историскиот музеј?
б) Која од групите не поминала покрај зградата на операта?
в) Пред кој објект се разминале групите В и С?
г) Која група се возела најбрзо, а која најспоро низ градот?
д) Која од групите поминала најдолг, а која најкус пат?
ѓ) Колку време групата С патувала од историскиот музеј до зградата на операта?



црт. 1

5. Наталија сака да ја огради својата цветна градина (црт. 2). Колку метри ограда ќе ѝ бидат потребни на Наталија?



црт. 2

6. Од тенка жица, долга 1 m, Сања сака да изработи алки за ѓердан, кои имаат кружна форма, така што секоја алка има дијаметар 1 cm. Колку алки може да направи Сања и колкава должина ќе има нејзиниот ѓердан?

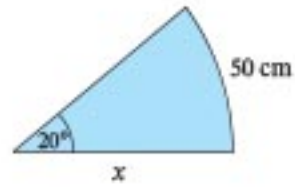
7. Минутната стрелка на еден часовник е долга 6 cm. Колкав пат ќе измине врвот на таа стрелка од пладне до 13:30 h?

8. Пресметај ги елементите означени со x од цртеж 3.

а) x - должина на кружен лак



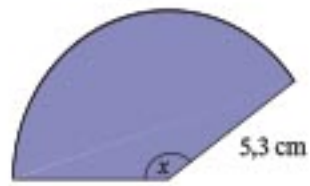
б) должина на кружен лак = 50 cm



в) должина на кружен лак = 10π cm

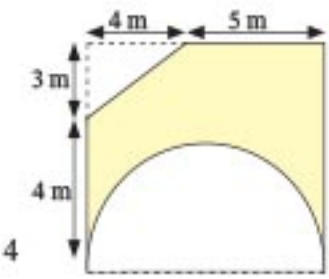


г) должина на кружен лак = 22,81 cm



црт. 3

9. Најди го периметарот на формата дадена на цртеж 4.



црт. 4

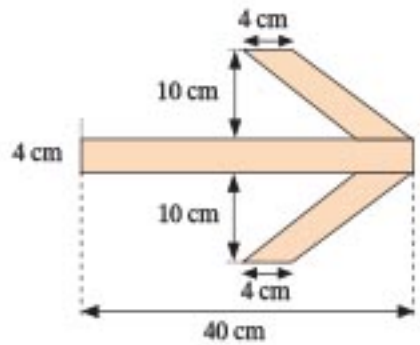
10. Која е проценката за плоштината на подот на лифт:
а) 3 mm², б) 3 cm², в) 3 m², г) 3 ha.

11. Запиши ја најсоодветната мерка со која ќе ја изразиш плоштината на:
а) DVD, б) тениско игралиште, в) монета од 1 денар, г) Шпанија.

12. Леонид е мајстор за изработка на украси од дрво. Тој има парче дрво во форма на ромб со периметар 96 dm и растојание меѓу спротивните страни 10 dm. Тој има кантичка со 400 ml боја за дрво на чија етикета пишува „Користете 50 ml боја на квадратен дециметар“. Дали Леонид има доволно боја двапати да ја премачка површината на парчето дрво?

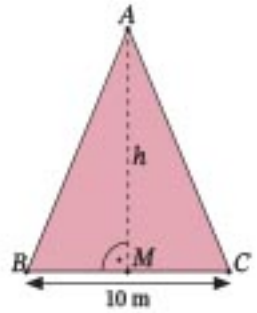
13. Колкава висина има паралелограм со плоштина 840 cm² ако една негова страна е 3,5 dm?

14. Пресметај ја плоштината на стрелката на цртеж 5.



црт. 5

15. Најди ја плоштината на триаголникот од цртеж 6, ако $h = 14$ m.



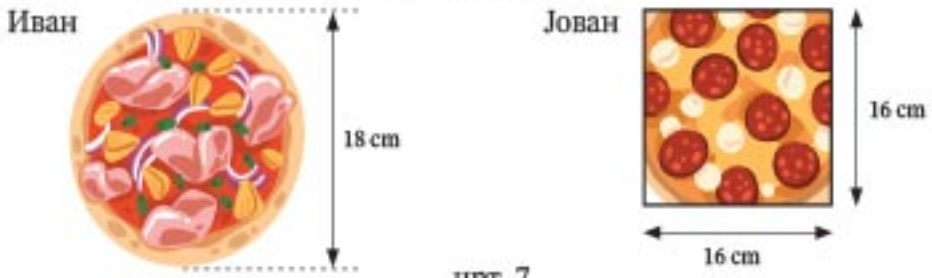
црт. 6

16. Ако плоштината на триаголникот е 63 cm², одреди ја висината на триаголникот што е повлечена кон страната a = 18 cm?

17. Канцелариска маса има форма на трапез со паралелни страни $a = 160$ cm и $b = 120$ cm, а растојанието меѓу нив е 50 cm. Колку ќе чини масата да се покрие со стакло ако цената е 1200 денари за метар квадратен?

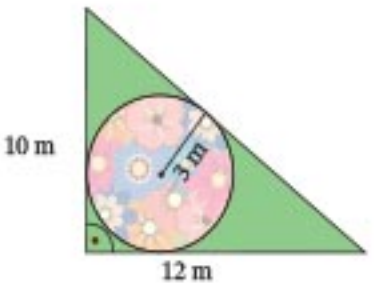
18. Квадрат со дијагонала 12 cm има иста плоштина како делтоид со една дијагонала 16 cm. Колкава е другата дијагонала на делтоидот?

19. Чија пица е поголема, на Иван или на Јован (црт. 7)?



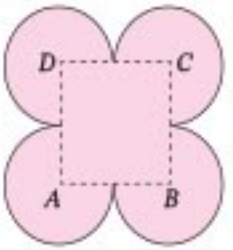
црт. 7

20. Тревник во паркот има форма на триаголник, а во него е засаден цветник во форма на круг (црт. 8). Најди ја плоштината само на тревниот дел.



црт. 8

21. Пресметај го периметарот и плоштината на формата на цртеж 9, ако квадратот $ABCD$ има страна долга 7 cm.

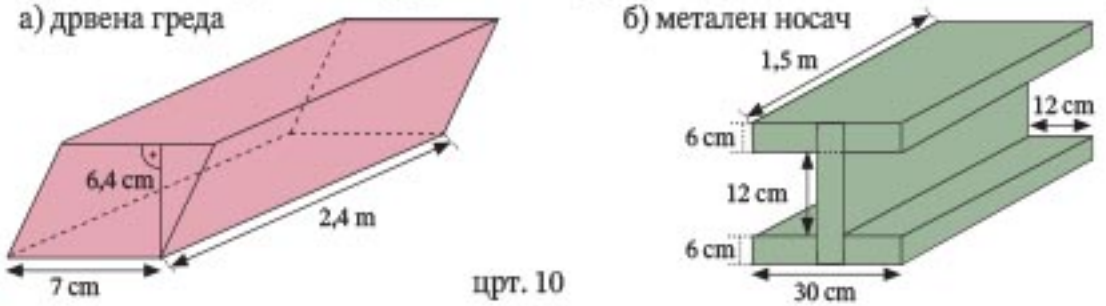


црт. 9

22. На цртеж 10 се прикажани градежни материјали. Најди ја нивната плоштина и волумен.

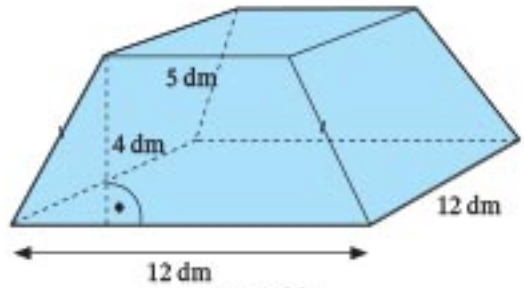
а) дрвена греда

б) метален носач



црт. 10

23. Пластичен сад за вода има форма и димензии како на цртеж 11.
Пресметај ја плоштината на пластиката што е потребна за да се направи садот (горната страна е отворена).
Колку литри вода собира садот ако целосно се наполни?



црт. 11

24. Покривот на дрвена колиба е пирамида со квадратна основа. Должината на страната на основата е 22 dm, а апотемата е 14 dm. Петар сака да го обои покривот на својата дрвена колиба и сака да знае колку боја треба да купи. Ако 1 кутија боја покрива 400 dm^2, колку кутии со боја треба да купи Петар?

25. Кутијата со боја што ја користи Петар за бојосување на својата колиба има форма на пирамида, со основа рамнокрак триаголник, со плоштина 50 cm^2 и висина 18 cm. Колку милилитри боја има во кутијата?

Тема 5:

РАБОТА СО ПОДАТОЦИ

Резултати од учење:

При изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш да:

- креираш детален и образложен план за истражување што ќе вклучува избор на примерок според различни обележја и анализа на податоци.
- презентираш и толкуваш резултати од истражувањето, вклучувајќи претставување со дијаграми, табели и одредување на ранг, мода, медијана и аритметичка средина.
- решаваш разни видови проблеми (за игри на среќа, економски проблеми, или статистички анализи), вклучувајќи настани што се исклучуваат и последователни настани.

1. ПОПУЛАЦИЈА И ПРИМЕРОК

Активност

Собери податоци за постигнатите резултати на последниот тест по математика за учениците од твоето одделение и претстави ги со табела. Како ги собираше податоците?

Пред да собираме податоци за некое истражување, прво мора да ја разгледаме целната **популација**. Тоа е групата на предмети, појави или луѓе за кои сакаме да добиеме информации.

Популација е множеството од сите елементи (единки, посебности, резултати) на некоја појава кои имаат заедничка карактеристика.

Заедничката карактеристика на елементите од една популација која е предмет на набљудување (мерење, испитување) се вика **обележје**.

Еден елемент (објект, единица) од популацијата се нарекува статистичка единка од популацијата.

Пример 1

Која е популацијата, која е статистичката единка, а кои се обележјата на популацијата при набљудување или истражување:
а) пол, возраст, вработеност на жители на еден град,
б) маса, старост, сорта на крави во фарма,
в) претплата, висина на сметка на корисници на услуги на телекомуникациска компанија.

а) Ако се набљудуваат жителите на еден град:
- популација се сите жители,
- статистичка единка е еден жител,
- обележја на единката можат да бидат: пол, вработеност, возраст, место на раѓање, боја на очи, висина и слично.

б) Ако се набљудуваат кравите во една фарма:
- популација се сите крави од таа фарма,
- статистичка единка е една крава од таа фарма,
- обележја на единката можат да бидат: количината млеко во литри што го дава една крава дневно, старост, сорта, маса и слично.

в) Ако се набљудуваат корисниците на услуги на компанија за телекомуникации:
- популација се сите корисници на таа компанија,
- статистичка единка е еден корисник,

- обележја на единката можат да бидат: вид претплата (припејд, постпејд), број на остварени телефонски разговори во текот на определен временски период, времетраење на телефонски разговори, висина на издадени сметки, старосна структура, полова структура на претплатници и слично.

Од дадените примери може да воочиш дека карактеристиките се променливи величини и дека вредноста на набљудуваната карактеристика на некоја единка не може однапред да се одреди.

Кога собираме податоци, можеме да користиме попис или да земеме примерок. Попис значи дека собираме податоци за секоја единка од популацијата. На пример, може да се направи попис на производи во една продавница или попис на жители на една држава.



црт. 1

Пример 2

Енес сака да ја дознае просечната висина на учениците во неговото училиште.
а) Која е популацијата, а што е обележјето на таа популација?
б) Објасни како е попрактично да постапи Енес за да се заштеди на време и средства.

а) Популација се сите ученици во училиштето.
За Енес да ја дознае просечната висина на учениците, пописот би вклучувал мерење на висината на секој ученик во неговото училиште.
Висината е обележјето на популацијата од ученици.

б) Во зависност од вкупниот број на ученици во училиштето, мерењето на висината на секој ученик би одзело време и би било многу непрактично. Поекономично во однос на време и средства за истражувањето е да се земе примерок од популацијата. Во зависност од вкупниот број на ученици, Енес може по случаен избор да одбере доволен број ученици од неговото училиште и да ја измери нивната висина.

Примерок е подмножество од популацијата.

Задача 1

Определи дали би се користела цела популација или примерок за истражување на:
а) возраста на луѓето во трговски центар,
б) масата на монетите произведени во фабрика за ковање монети,
в) цените на артиклите од мени во ресторан.

При земање на примерок од популацијата, собирањето на податоци е побрзо и поедноставно отколку да се работи со целата популација, но не е толку детално или точно.

Бидејќи примероците не даваат информации за целата популација, статистичките податоци добиени од примерок можат да се користат само за **проценка** на статистиките за популацијата.

За да биде проценката веродостојна на реалната ситуација примерокот треба да биде **репрезентативен**. За да се постигне репрезентативност на примерокот, треба да бидат исполнети следните услови:

- Изборот на статистичките единки да биде случаен и независен и секоја единка да има подеднакви шанси да биде избрана
- Примерокот да биде доволно голем во однос на популацијата која ја претставува
- Примерокот треба на правилен начин (верно) да ја претставува целата популација

Пример 3

Одговори на следните прашања во однос на истражувањето што треба да го спроведе Енес во пример 2:

а) Како треба да постапи Енес при избор на примерокот за да биде сигурен во веродостојноста на резултатите од своето истражување?

б) Кои се предностите, а кои недостатоците ако Енес избере примерок наместо целата популација?

а) Примерокот што ќе го избере Енес треба да ги исполнува сите услови дадени погоре во лекцијата. На пример ако во неговото училиште има 900 ученици, доволно би било примерокот да има 45 ученици. Изборот на секој ученик во примерокот треба да биде случаен и независен и секој ученик да има подеднакви шанси да биде избран. Исто така примерокот според својата структура треба да одговара на целата популација ученици.

- Примерокот на Енес нема да биде репрезентативен доколку тој избере примерок од ученици само од 9 одделение, бидејќи тогаш не е соодветен на сите ученици во училиштето. Просечната висина на примерокот би била многу поголема од просечната висина на **сите** ученици во училиштето.
- Од друга страна, ако Енес избере само 5 ученици, просечната висина на примерокот би била несоодветна проценка на просечната висина на **сите** ученици, затоа што примерокот е многу мал.

б) Користењето на примерок има свои предности, односно собирањето на податоците е побрзо, поедноставно и поекономично во однос на време и други ресурси, но од друга страна дава проценка за популацијата и не е толку детално како кога би се користела целата популација.

Задача 2

Во табелата се дадени примери за избран примерок во врска со истражување на дадено обележје на дадена популација. Објасни дали предложениот примерок е репрезентативен, а потоа во случаите каде има потреба наведи примерок за кој сметаш дека ќе даде подобар резултат.

популација	обележје	примерок
ученици од нашата држава	спортување	по едно случајно избрано основно и средно училиште
тостери произведени во една фабрика	исправност	случајно избран еден од сто производи по сериски број
сите атоми во атмосферата	процент на водород	мерења спроведени во Скопје
производи во една продавница	број на производи	цела популација

Задача 3

Едно училиште има 820 ученици. 40 од учениците се избрани по случаен избор за да пополнат анкета за нивната училишна униформа.

а) Пронајди ја големината на:

1) целната популација,
2) примерокот.

б) Објасни зошто податоците собрани на секој од следниве начини можеби нема да дадат примерок кој претставува реална слика за популацијата:

1) Ученикот што ја спроведува анкетата ги прашува своите десет најдобри пријатели да ја пополнат анкетата.
2) Сите ученици од едно одделение се анкетирани.
3) Доброволци се пријавуваат да ја пополнат анкетата.

Задача 4

Компанија за електронски уреди сака да направи истражување за тоа дали луѓето купуваат повеќе такви уреди во продавница или преку интернет. Тие ги прашуваат луѓето што стојат надвор пред една продавница за електронски уреди во понеделник наутро. Објасни зошто податоците што ќе се соберат веројатно нема да соодветствуваат на вистинската ситуација.

Задача 5

Фабрика за електрични апарати произведува по 15 000 апарати дневно. Како менаџер на фабриката имаш задача да истражиш колку од апаратите што се произведуваат се неисправни.

а) Одреди ја популацијата, обележјето и предложи избор на примерок.

б) Кои се предностите, а кои недостатоците, ако работиш со примерок, наместо со цела популација?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Училишната продавница сака да воведе нова здрава ужина. Директорот одлучува да направи мало истражување за да дознае кои ужинки најмногу им се допаѓаат на учениците во училиштето. За таа цел, треба да им помогнеш на групата ученици што треба да истражува.

а) Која е популацијата, а кое обележјето при ова истражување?

б) Објасни ги предностите и недостатоците на пописот како метода применета во овој случај.

в) Понуди најмалку два различни начини за избор на примерок од ученици што ќе ја претставува популацијата?

г) Од предложените примероци, избери еден што најдобро ја претставува целата популација и објасни зошто мислиш дека токму тој примерок е репрезентативен.

2. Училиштето „Свети Кирил и Методиј“ има 700 ученици. Директорот сака да дознае колку ученици во училиштето тренираат некој спорт редовно.

а) Која е популацијата во ова истражување?

б) Кое е обележјето што се проучува?

в) Кој од следниве описи претставува примерок од оваа популација, а кој не? Објасни го твојот одговор.

1) Сите ученици од VI одделение (85 ученици).
2) По десет ученици од секое одделение во училиштето (од I до IX одделение-вкупно 90 ученици).
3) Сите наставници во училиштето.
4) Првите 50 ученици кои влегоа во училишната библиотека во вторник наутро.

г) Директорот размислува дали да ги анкетира сите 700 ученици или да земе примерок од 120 ученици.

1) Наведи две предности да се анкетираат сите 700 ученици.
2) Наведи два недостатоци да се анкетираат сите 700 ученици.

3. Фабрика за светилки произведува 50 000 светилки дневно. Контролорот на квалитет сака да ја провери трајноста на светилките (Трајноста се испитува така што светилката се остава да свети непрекинато и се бележи времето на светење додека не прегори). За да го направи ова, тој тестира 200 светилки од дневното производство.

а) Која е популацијата во ова истражување, кој е примерокот и кое е обележјето што се проучува?

б) Објасни кој од следниве описи претставува примерок од оваа популација, а кој не.

1) 200-те тестирани светилки од дневното производство.
2) Сите светилки произведени во првиот час од работата на фабриката.
3) Сите произведени светилки во еден ден.
4) Формата на светилките што се испитуваат.
5) Првите 100 светилки што излегоа од производната линија по одморот на работниците.

в) Контролорот на квалитет размислува дали да ги тестира сите 50 000 светилки (цела популација) или да земе примерок од 500 светилки.

1) Наведи две предности да се тестираат сите 50 000 светилки.
2) Наведи два недостатоци да се тестираат сите 50 000 светилки.

4. Определи дали попис или примерок би требало да се користи при истражувањето:
   а) возраста на луѓе кои го посетиле националниот парк,
   б) исправноста на батерии кои се произведуваат во фабрика,
   в) цените на услуги во салон за убавина.

5. Раководителот на автобуската станица сака да направи истражување дали луѓето се задоволни од нивните услуги. Тој решил да ги праша првите 10 луѓе што пристигнале на автобуската станица во средата наутро.
   а) Дали тој избрал добар примерок? Објасни го твојот одговор.
   б) Како може да го подобри својот метод за собирање податоци?

6. Еден весник ги поканил читателите да одговорат на анкета по телефон во врска со безбедноста во сообраќајот во градот. Анкетирани биле 40 испитаници.
   а) Дали изборот на примерокот на овој начин е соодветен? Објасни го твојот одговор.
   б) Наведи неколку причини зошто резултатот од оваа анкета не е веродостоен и предложи промени за да се добие репрезентативен примерок.

7. Учениците од еколошкиот клуб сакаат да дознаат каков е квалитетот на воздухот околу нивното училиште. Тие имаат мал уред кој мери концентрација на честички во воздухот (PM – честички). Уредот може да го постават на различни места околу дворот и околните улици.
   а) Што е популацијата, примерокот и обележјето на ова истражување?
   б) Опиши најмалку два различни примероци што може да се земат од истата популација?
   в) Објасни ги предностите и недостатоците на тоа да се измери квалитетот на воздухот на секоја можна локација околу училиштето (попис).
   г) Избери примерок што сметаш дека е најрепрезентативен за целата популација и објасни зошто.

Истражување

Сите ние речиси секојдневно ја проверуваме временската прогноза. Истражувај како метеоролозите ја подготвуваат временската прогноза.
Процени дали се веродостојни следните изјави и образложи го твојот одговор:

а) Просечната температура во градот денес е 25 °C (измерено со 2 термометри).
б) Јули е најтопол месец во годината (базирано на 10-годишни мерења).
в) Денес ќе падне дожд во сите делови на градот (предвидување базирано на сателитски снимки).
г) Објасни ги одговорите на следните прашања:
- Зошто метеоролозите поставуваат термометри на различни височини и локации?
- Како влијае големината на примерокот на точноста на временската прогноза?
- Што би се случило ако ги користиме само мерењата од еден термометар за цел град?

2. ДИСКРЕТНИ ПОДАТОЦИ. ТАБЕЛА НА ФРЕКВЕНЦИИ

Активност.

а) Која е популацијата, а кое нејзиното обележје во секој од дадените примери?
б) Како се изразуваат обележјата во секој од примерите (со број, опис, категорија)?
1) На систематски преглед е измерена висината на учениците од една паралелка.
2) Во ботаничка градина е забележана бојата на цветовите на неколку видови цвеќиња.
3) Во фабрика за производство на фрижидери се проверува исправноста на добиените производи.

Според начинот на изразување, обележјата можат да бидат многу различни.
Ако обележјето е изразено **описно** велиме дека се работи за **квалитативно обележје**.
Ако обележјето е изразено со **број**, тогаш велиме дека е **квантитативно обележје**.

Пример 1

Дали се квалитативни или квантитативни обележјата од активноста дадена на почетокот на лекцијата?

1) Во овој случај обележјето се изразува со број бидејќи се работи за висината на ученици која може да биде било кој број од некој интервал на вредности. Значи обележјето е квантитавно.
2) Бојата на цветовите е квалитативно обележје бидејќи се изразува описно.
3) Обележјето е квалитативно и може да се изрази описно со две категории: исправен или неисправен производ.

Пример 2

Какви бројни вредности можат да се користат при изразување на следните обележја:
а) должина на патека за трчање, б) време на патување во часови,
в) број на членови во семејство, г) висина на дрвја,
д) број на изостаноци во училиште.

Во случаите под а), б), г) дадените обележја може да примат вредности од некој интервал, на пример должината на патеката за трчање може да биде 234 m.
Овие податоци се прибираат со **мерење**.

Обележјата под в) и д) можат да примат вредности како 1, 2, 3, ... односно природни броеви. Овие податоци примарно се прибираат со **броење**.

Дискретни податоци се податоци што можат да примат само одредени, пребројливи вредности.

Други примери за дискретни податоци се: број на ученици, број на автомобили, големина на облеката изразена со број и слични на нив, односно тоа се податоци кои имаат точна, прецизна, јасно дефинирана вредност која се знае со сигурност.
За разлика од нив, висината на човекот, температурата на воздухот, масата на телата и други, можат да бидат кој било децимален број од некој интервал на вредности.

Задача 1

Кои од следниве податоци се дискретни:
а) време во минути на тркачите на една трка,
б) број на пешачења во текот на една седмица на жителите на една населба,
в) број на производи кои се купуваат во маркет,
г) должина на стапало на 13 годишници,
д) дебелина на книги во училишната библиотека,
ѓ) должина на престој во хотел изразена во број на цели пансиони?

Несредените податоци, посебно ако нивниот број е голем, не кажуваат многу за популацијата што се испитува. Затоа е потребно да се средат. Прво што треба да се направи е нивно распоредување (подредување) и тоа:

- податоците чии вредности се дадени описно (со зборови) се класифицираат во категории;
- податоците чии вредности се дадени нумерички (со броеви) се подредуваат по големина, од најмалиот до најголемиот;
- податоците чии вредности се дадени нумерички (со броеви) и има мал број повторени вредности се групираат во интервали во табела.

И во трите случаи, за полесно средување, непосредно до вредноста (резултатот) секое повторување на ист податок се обележува со знак (цртичка).

Пример 3

При истражување на брзината на реакција на група од 10 ученици добиени се следните податоци:

ученик	Перо	Томе	Ана	Ристо	Кире	Симе	Ема	Илир	Ајше	Иле
брзина на реакција	брзо	бавно	брзо	брзо	брзо	бавно	брзо	брзо	бавно	брзо

Среди ги податоците во табела.

Податоците (резултатите) се дадени без никаква систематичност и прегледност. Со броење се одредува која вредност (брзо, бавно) колку пати се јавува. Ја составуваме следната табела:

брзина на реакција	знак	број на ученици
брза реакција	𝍸 II	7
бавна реакција	III	3

Задача 2

При едно истражување за доминантна рака при работа кај 16 деца во една паралелка од почетните одделенија биле добиени следните податоци:

дете	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
доминатна рака	десна	десна	десна	лева	лева	десна	лева	десна	лева	десна	десна	десна	лева	двете	двете	двете

а) Среди ги податоците во табела.
б) Која рака е доминантна?
в) Дали можеш да донесеш и други заклучоци?

Пример 4

Во одделението на Агнеса, другарите зборувале кој може да нурка и колку долго може да го задржат воздухот во вода. Агнеса решила да ги запише податоците за тоа колку долго другарите можат да го задржат воздухот:
11, 17, 21, 35, 24, 14, 18, 22, 33, 42, 23, 19, 14, 24, 17, 12, 13, 18, 19, 22, 21, 24, 14, 17

Одговори на следните прашања:
а) Колку ученици успеале да го задржат воздухот повеќе од 30 секунди?
б) Колку ученици успеале да го задржат воздухот повеќе од 20, а најмногу 40 секунди?
в) Кое е најдолгото време за кое еден ученик може да го задржи воздухот?

Во добиените податоци има мал број повторени вредности, односно без средување табелата ќе содржи многу редици или колони, па не е многу корисна.
Затоа, овде подобро е податоците да се **групираат**, односно да се направи **табела на фреквенции со групирани податоци**.
Притоа, важно е одделните групи да не содржат вредности кои припаѓаат на две соседни групи, односно не може две последователни групи да бидат: 10-20 и 20-30 секунди (податокот со големина 20 s смее да припаѓа само на една ваква група).
Значи групите мора да се дисјунктни и треба да имаат еднакви должини.

број на секунди	фреквенција
11-20	13
21-30	8
31-40	2
41-50	1

Од добиената табела на фреквенции со групирани податоци може да видиме колку ученици можат да го задржат воздухот повеќе од 30 секунди.
Тоа се учениците од последните две групи на вредности, односно $2 + 1 = 3$ ученици. Повеќе од 20, а најмногу 40 секунди издржуваат 10 ученици, а само 1 ученик може да издржи повеќе од 40 секунди.

Кога изработуваме табела на групирани податоци треба да внимаваме на следното:
- интервалите (групите) да бидат со иста должина,
- да нема „преклопување“ на интервалите,
- да нема „празнини“ меѓу интервалите.

Задача 3

Мерита истражува за бројот на мешунки на растенијата во нејзиниот стакленик. Таа подготвила табела за бележење:

број на мешунки	цртички	фреквенција
15-20		
20-30		
35-40		
40-50		

Најди две неправилности за табелата, прецртај ја во твојата тетратка и коригирај ја.

Задача 4

Поените освоени на тестот по математика за 50 ученици од две осми одделенија се следните:
35, 37, 38, 43, 45, 47, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 54, 54, 55, 56, 57, 57, 57, 59, 59, 60, 60, 52, 62, 63, 64, 64, 65, 66, 66, 67, 68, 68, 69, 69, 69, 70, 71, 72, 72, 74, 76, 77, 75, 78, 81, 81, 84, 84.
Претстави ги податоците во табела на фреквенции со групирани податоци.

Задача 5

Одреден број ученици од едно училиште биле анкетирани за растојанието меѓу нивниот дом и училиштето, и добиени се следниве резултати:

растојание (во km)	знак	број на ученици
$0 < s \leq 1$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$1 < s \leq 2$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II	
$2 < s \leq 3$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$3 < s \leq 4$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$4 < s \leq 5$	𝍸 𝍸 II	

Дополни ја табелата, а потоа одговори на прашањата:

а) Дали може од табелата да одредиме кое е најкраткото растојание кое некој ученик го поминува од дома до училиште? Објасни го твојот одговор.

б) Во кој интервал на растојание има најголем број ученици?

в) Колку ученици живеат на растојание од 3 km или пократко?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Фолклорна група го евидентира учеството на своите членови. Притоа собира податоци за:

а) времето на членување во групата,

б) бројот на проби кои ги посетуваат неделно,

в) бројот на кореографии кои ги имаат обработено,

г) висината на секој член од фолклорната група,

д) масата на секој член од фолклорната група,

ѓ) возраста на секој член.

Определи кои од тврдењата претставуваат пример на дискретни податоци и образложи го твојот одговор.

2. Даден е бројот на денови на престој во хотел за 40 гости:

1, 4, 14, 13, 15, 2, 7, 7, 12, 10, 17, 16, 10, 8, 9, 1, 3, 5, 6, 12, 16, 16, 4, 9, 7, 5, 12, 11, 9, 8, 2, 1, 12, 15, 3, 4, 8, 12, 4, 15.

а) Која е популацијата, а кое нејзиното обележје?

б) Дали собраните податоци се дискретни или не?

в) Најди ги неправилностите во табелата на фреквенција, прецртај ја во твојата тетратка, коригирај ја и дополни ја.

број на денови на престој	фреквенција
1-3	
4-7	
9-12	
12-14	
15-17	

3. Заради потребното укоричување и обновување на стари книги, во училишната библиотека била измерена дебелината на неколку книги во сантиметри. Добиените вредности се:

2,4	3,2	0,3	0,8	1,1	1,4	2,3	2,9	0,4	1
1,2	2,6	2,5	2,1	0,9	1,4	1,1	2	2,2	3

а) Дали добиените податоци се дискретни? Објасни!

б) Претстави ги добиените податоци со табела на фреквенција. Кое е обележјето кое го запишуваш во табелата?

4. Славе ги мери времињата (t во минути) што им се потребни на некои од другарите за да стигнат од дома до градскиот базен. Андреј брои по колку должини (n) дневно плива секој од другарите.

Податоци што ги собрал Славе:

24, 18, 25, 6, 31, 20, 17, 29, 37, 7, 23, 46, 30, 33, 19, 41, 15, 45, 21, 32

Податоци што ги собрал Андреј:

0, 1, 5, 6, 3, 2, 1, 2, 0, 4, 2, 4, 3, 0, 1, 4, 5, 7, 4, 3

а) Кој од нив собирал дискретни податоци? Објасни го одговорот.

б) Запиши ги времињата што ги забележал Славе во табела на фреквенција како дадената која ќе ја прецрташ во твојата тетратка.

време, t (минути)	знак	фреквенција
$0 < t \leq 10$		
$11 < t \leq 20$		
$20 < t \leq 30$		
$30 < t \leq 40$		
$40 < t \leq 50$		

в) Запиши ги податоците што ги прибрал Андреј во табела како дадената која ќе ја прецрташ во твојата тетратка.

препливани должини, n	знак	фреквенција
0-2		
3-5		
6-8		

г) Спореди ги табелите под б) и в) и наведи неколку разлики меѓу нив.

5. Висините, изразени во cm, на учениците од едно одделение се следниве:

149, 148, 152, 146, 152, 152, 146, 148, 149, 151, 152, 146, 146, 149, 153, 146, 153, 148, 151, 152, 151, 152, 152, 152, 152, 148, 152, 148, 152, 146, 149.

а) Претстави ги во табела на фреквенција.

б) Колку е најголемата висина на некој ученик во одделението? Има ли повеќе од еден ученик со таа висина?

в) Кои ученици се повеќе, со најмалата висина или со најголемата висина во одделението?

г) Има ли ученици со висина помала од 144 cm?

д) Колку ученици имаат висина поголема од 145 cm, а помала од 156 cm?

6. За секој ден од минатиот месец, најди го бројот на соученици кои биле отсутни од училиште.

а) Направи табела на фреквенции со групирани податоци.

б) Колку ученици отсуствувале повеќе од 3 дена во текот на месецот?

в) Има ли ученици кои воопшто не отсуствувале?

г) Колку ученици отсуствувале точно 7 дена?

Истражување

Истражи дали постои поврзаност помеѓу телесната маса и навиките во исхраната кај учениците во твоето одделение. Собери податоци за:

а) висината и масата на телото (за да пресметаш индекс на телесна маса),
б) бројот на оброци во текот на денот, и
в) дали оброците претежно се здрави или нездрави,
г) направи табели на фреквенција со групирани податоци,
д) обиди се да ги толкуваш резултатите за да откриеш дали исхраната влијае на индексот на телесната маса.

3. ПЛАНИРАЊЕ НА ИСТРАЖУВАЊЕ И СОБИРАЊЕ ПОДАТОЦИ

Активност

По неколку месеци од сега имаш резервиран билет за патување во место во кое досега не си бил.
а) Како ќе се подготвиш за патувањето во смисла на облека, обувки, храна и друго?
б) Кои податоци ќе ги прибереш пред тргнување?
в) Како ќе го испланираш патувањето?

За да добиеме информации за некои други состојби и појави, треба да ги собереме и да ги анализираме податоците кои ги прикажуваат тие состојби и појави. За успешна анализа на податоците важно е прво да испланираме кои податоци ни требаат и на кој начин ќе ги собереме, а тоа да го направиме во согласност со поставените барања и услови на задачата. Истражувањата во кои вршиме собирање, средување, претставување (прикажување) и анализа на податоци, се нарекуваат **статистички истражувања**.
За статистичкото истражување, при решавање на одреден проблем, да биде успешно, потребно е да се направи добар план за негово спроведување, најчесто преку следните чекори:

1) Идентификување на проблемот што го истражуваме, заедно со прашањата за кои истражувањето треба да ни даде одговори.
2) Собирање и средување на податоците.
3) Претставување на податоците.
4) Анализа на податоците и донесување соодветни заклучоци.

1) Идентификување на проблемот што го истражуваме, заедно со прашањата за кои истражувањето треба да ни даде одговори

Пример 1

Јована сака да истражи која ракометна репрезентација постигнала најголем број голови на Светското првенство. Како Јована да го започне своето истражување?

За да ги дознае податоците што ѝ требаат, Јована може да ги посетува сите натпревари и да ги запишува резултатите, а потоа да ги обработи. Но, тоа секогаш не е можно. Имено, некои натпревари се одржуваат во исто време, а треба и да успее да набави билет за секој натпревар. Од истата причина не може ниту да ги следи сите натпревари на телевизија. Најдобар избор за собирање на податоците ќе биде да ги следи резултатите од сите натпревари на официјалната интернет страна на првенството.

2) Собирање и средување на податоците

Собирањето на податоците може да биде од различни извори на податоци.

- **Примарни податоци** се податоци до кои сме дошле сами директно користејќи некој од начините на собирање податоци.
- Но нашите збирки податоци можат да содржат и податоци што претходно ги прибрале други истражувачи, односно претходно ги собирал некој друг. Таквите податоци ги викаме **секундарни податоци**.

Пример 2

Мустафа сака да отвори бизнис во неговата мала населба. За да одлучи каков бизнис ќе биде најпотребен и доходовен, му требаат податоци за возраста и интересите на локалните жители. Мустафа треба да одлучи дали ќе собира примарни податоци или секундарни податоци. Кои се предностите, а кои недостатоците во секој од случаите на собирање на податоците кои може да ги направи Мустафа?

Секој од пристапите има свои предности и недостатоци.

1) Собирање примарни податоци (директно со прашување на жителите)

Предности:
- податоците се свежи и актуелни,
- Мустафа добива точни информации конкретно за неговата населба,
- може да постави дополнителни прашања ако нешто не е јасно,
- добиените податоци се прилагодени на целта – бизнис планот.

Недостатоци:
- одзема време да се анкетираат доволно луѓе,
- потребно е повеќе труд и организација (изработка на прашалник, обработка на податоци),
- некои луѓе можеби нема да сакаат да одговорат,
- може да има грешки при собирањето и внесувањето на податоците.

2) Собирање секундарни податоци (интернет, статистички завод, претходни истражувања, публикации)

Предности:
- податоците се брзо достапни,
- нема потреба од анкети и директен контакт со луѓе,
- пониска цена и помалку труд за собирање на податоците,
- може да се користат податоци од професионални истражувања.

Недостатоци:
- податоците можеби не се само за неговата населба, туку пошироко,
- може да се стари или неажурирани,
- не се прилагодени на неговата конкретна идеја за бизнис,
- може недостасуваат токму тие информации што му се потребни (на пример: интереси, навики).

Ако Мустафа сака попрецизен бизнис план, најдобро е да комбинира примарни и секундарни податоци – прво да погледне статистики, а потоа да направи кратка анкета во населбата.

Задача 1

Какви податоци би се користеле (примарни или секундарни) за да се истражат:
а) оценките по историја во твоето одделение,
б) навиките за рециклирање во твоето место на живеење,
в) навиките за рециклирање во државата,
г) временските услови.

Образложи го твојот одговор.

Собирањето на податоците за даден проблем кој се истражува можеме да го направиме на повеќе начини: со набљудување, со мерење, со прашалник, со споредување, со броење и друго.
За да се олесни процесот на собирање податоци и нивната обработка треба да се подготват колку што е можно подобри **инструменти** за собирање на податоците. Инструментите треба да бидат лесни и практични за користење и да ги даваат сите информации кои ни се потребни. Некои од инструментите што најчесто се користат се: **набљудување**, **анкета**, **интервју**, **чек листа**, **чек листа со скала за проценка**, **прашалник за**: факти, ставови, мислења или интереси итн.
Откога ќе ги приберемe, податоците ги групираме, односно ги средуваме во соодветни категории.

Пример 3

Учениците од VIII одделение во едно основно училиште треба да соберат податоци за оддалеченоста на домовите на учениците до училиштето и начинот на доаѓање на училиште. Затоа изготвиле прашалник во кој секој ученик ќе одговори на неколку прашања.
Прашањата може да се поставени со избор, дополнување, заокружување и друго.

Често пати изборот може да се изврши со внесување на знакот ☑ или знакот ☒.

ПРАШАЛНИК

Име и презиме на ученикот:

_____

Одделение: 1. VII а 2. VII б 3. VII в

Избери го одговорот заокружувајќи ја буквата или бројот пред соодветниот одговор.

1. Растојанието од мојот дом до училиштето е приближно:

1. 100 m 2. 200 m 3. 300 m 4. 400 m 5. 500 m
6. 600 m 7. 700 m 8. 800 m 9. 900 m 10. 1km
11. Помеѓу 1 km и 2 km 12. Поголемо од 2 km

2. На училиште доаѓам:

1. Пеш 2. Со велосипед 3. Со автомобил
4. Со автобус 5. Со тротинет

Прашалниците треба да исполнуваат неколку услови за да бидеме сигурни дека ќе ја дадат вистинската слика на истражуваниот проблем. Прашањата не смеат да бидат наведувачки, навредливи, долги и неразбирливи и најдобро е да бидат тестирани пред употреба.

Задача 2

Влатко сака да истражи колку ученици од неговото училиште свират еден или повеќе музички инструменти и кој/кои се тие инструменти.

а) Кои инструменти за собирање податоци може да ги користи Влатко?
б) Дали собраните податоци се примарни или секундарни?

Пример 4

Илија сака да открие колку време поминуваат учениците од неговото одделение во гледање телевизија. Тој размислува за две можни прашања при собирањето на податоци:

1) Колку гледаш ТВ?
2) Колку часови минуваш во гледање ТВ?

Најди по една забелешка за секое од прашањата и запиши подобро прашање кое би можел да го користи Илија.

Во прашањето 1) не е јасно каков одговор се бара, па добиените одговори можат да бидат „многу“ или „не многу“ што не дава јасна претстава за истражуваниот проблем.

И прашањето 1) и прашањето 2) немаат определено временски период за кој се однесуваат, па некој од испитаниците може да одговори 3 часа во еден ден, а друг 3 часа за 1 месец, што повторно не дава јасна претстава за истражуваното прашање.

Најдобро е прашањето да се постави со неколку понудени опции за можен одговор и да вклучува временски период на кој се однесува, на пример:

Колку часови гледаше ТВ во текот на вчерашниот ден?

- воопшто не
- помалку од 1 час
- од 1 до 2 часа
- повеќе од 2 часа

Во овој случај треба да се внимава полињата за одговори да содржат тврдења кои немаат празнини или преклопувања и го вклучуваат целиот опсег на одговори.

Задача 3

Лара составила инструмент за собирање податоци за да истражи колку често луѓето го користат јавниот градски превоз. Запиши неколку негативни страни на овој прашалник и предложи нов подобрен инструмент за собирање на податоци.

ПРАШАЛНИК

Име и презиме:

Колку често го користиш јавниот градски превоз?

- никогаш
- понекогаш
- често
- секогаш

Пример 5

Менаџер на маркет истражува по колку пакувања житарки се продаваат дневно од три различни производители. Како може да ги собере податоците?

Во овој случај податоците се собираат со **набљудување** и **броење**.
Притоа добиените сознанија можат да бидат прикажани со табела или графички, што подоцна ќе биде искористено за анализа и донесување соодветни заклучоци.

3) Претставување на податоците

Резултатите од средувањето на податоците, изразени во броеви, прегледно ги прикажуваме во табела, која најчесто е составена од правоаголни полиња, добиени со вкрстување на хоризонтални и вертикални линии. Ваквиот начин на претставување може да биде непрегледен. Покрај изготвување табела, друг начин на претставување на податоците е графичкиот, кој го користиме за сликовито претставување на средените податоци.

Пример 6

Треба да го истражиме производството на земјоделски производи (домати и зелка) на една фарма со четири засебни парцели. Две од парцелите се обични, две со пластеници. На кој начин може да се испита следното:

а) По колку килограми домати и зелка дневно се добива од секоја засебна парцела?

б) Постои ли зависност на добиеното количество на секој производ од тоа дали парцелата е обична или со пластеници?

в) Зависноста на добиеното количество производи од засадената сорта на производот.

а) За да се одговори на прашањето, потребен е подолг период секојдневно да се собираат податоците за добиеното количество производи од секоја парцела, со мерење. Потоа, податоците да се средат и да се групираат во зависност од видот на парцелата и сортата на производите.

Во однос на средувањето податоците најпрегледно е да се средат во табели. На пример, табела за произведено количество во однос на парцелата:

	парцела 1 обична	парцела 2 обична	парцела 3 пластеници	парцела 4 пластеници
домати	200 kg	250 kg	300 kg	400 kg
зелка	250 kg	400 kg	450 kg	600 kg

б) За секој од набљудуваните земјоделски производи можат да се издвојат дневните количества добиени од различна парцела за да се одговори на прашањето дали постои зависност на производството од видот на парцелата.

в) На крајот, со анализа на собраните, а потоа и средени податоци во врска со сортата на производите и добиеното количество можат да се извлечат соодветни одговори на поставеното прашање.

4) Анализа на податоците и донесување соодветни заклучоци

Во овој чекор, ги анализираме податоците од табеларното и графичкото прикажување, даваме одговори на поставени прашања и донесуваме соодветни заклучоци.
Графичкото (сликовито) претставување на податоците често помага при нивната анализа.
За анализирањето на податоците ќе зборуваме подоцна.

Пример 7

Треба да направиш мало истражување за навиките на учениците од твојата паралелка во врска со користењето на телефони, таблети и компјутери. Запиши ги и објасни ги сите чекори на планот на истражувањето.

Дадени се по редослед сите чекори од планот за спроведување на истражувањето:

1) Планот на истражувањето треба да ги содржи одговорите на следниве прашања:
   - Што сакаш да дознаеш? (истражувачко прашање: Колку време учениците од моето одделение користат дигитални уреди во текот на денот?)
   - Кои ученици ќе ги вклучиш? (колку лица, од кое одделение, од кое место)
   - Кои податоци ќе ги собираш? (на пр., време на користење, за што ги користат уредите,...)
   - Колку време ќе трае истражувањето?

2) Секако од големо значење е изборот на соодветен инструмент за собирање на податоците што може да биде анкета (преку изготвен прашалник), табела за дневно бележење или интервју со неколку ученици. Еве неколку пример прашања кои можат да се стават во прашалникот:

- Колку часа дневно во просек користиш дигитални уреди:
  а) помалку од 2 часа, б) од 2 до 4 часа, в) повеќе од 4 часа?
- За што ги користиш најмногу? (учење, игри, социјални мрежи...)
- Кога најчесто ги користиш уредите:
  а) пред училиште, б) за време на училишните одмори,
  в) веднаш по учлиште, г) доцна навечер пред спиење?

На овој начин би собрал примарни податоци. Доколку при твоето истражување сакаш да користиш секундарни податоци, тогаш можеш да побараш статистика на интернет: колку просечно време користат тинејџерите дигитални уреди во Македонија или во светот?

3) Откако се собрани податоците за поголема прегледност можат да се организираат во табели и/или да се претстават графички.

4) Анализата на добиените податоци може да биде во вид на краток текст со заклучоци во врска со прашања како што се следните: Што открив? Што значат резултатите?

Задача 4

Направи план за собирање податоци за тоа колку од своето слободно време користат за спортување учениците од твојата паралелка. Кои се предностите, а кои недостатоците од користењето на интервју или користењето на прашалник за собирање на потребните податоци?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Лирим собира информации за средствата (парите) што дневно ги трошат учениците од неговото одделение. Креирај инструмент со кој Лирим може да ги собере податоците. Дали собраните податоци се примарни или секундарни?
2. Благој сака да истражи колку учениците од неговото училиште користат овошје и зеленчук во својата исхрана. Кои инструменти за собирање на податоци може да ги користи? Кои прашања треба да ги постави? Состави соодветен прашалник. Имаш ли идеја како Благој да ги претстави податоците?
3. Направи план за собирање податоци за бројот на прочитани книги за време на распустот меѓу учениците од твојата паралелка. Кои инструменти за собирање податоци ќе ги користиш? Дали собраните податоци се примарни или секундарни?
4. Направи план за собирање податоци за максималните и минималните дневни температури во текот на минатиот месец.
5. Направи план за собирање податоци за успешноста на репрезентативните голмани во Европската ракометна лига.

Истражување

Направи план за истражување и собери податоци за тоа колку учениците од VIII одделение во твоето училиште се физички активни секојдневно.

4. ДИЈАГРАМИ

Активност

На дијаграмот на цртеж 1 се прикажани резултати од тестот по математика во VIII-б одделение.

а) Колку ученици добиле оценка 5?

б) Колку ученици добиле оценка 1 или 2?

в) Која оценка ја добиле најмногу ученици?



црт. 1

Ако сакаме лесно и брзо да извлечеме заклучоци од собраните податоци, нив треба да ги прикажеме прегледно и едноставно. Тоа ќе го постигнеме со графичко претставување со дијаграми.

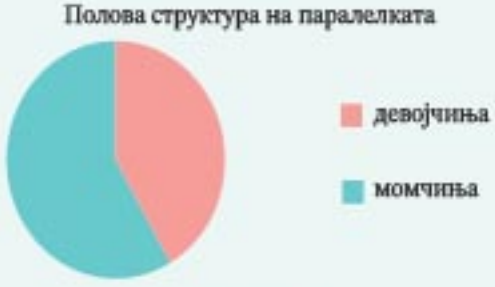
Скенирај го кодот и разгледај ги дијаграмите.

Пример 1

Во едно одделение има 36 ученици од кои 15 се девојчиња. Прикажи ја половата структура на паралелката со секторски дијаграм.

За обележјето пол има две можности - машки и женски, па затоа во дијаграмот ќе има две категории: момчиња и девојчиња.
Бројот на момчиња е $36 - 15 = 21$ момче (црт. 2).
Според тоа кружниот дијаграм ќе биде поделен на два дела (сектори).
За да се определи големината на секој од деловите, прво ќе се одреди аголот на делот од полниот агол со кој се претставува еден ученик.
Тој агол е $360^\circ : 36 = 10^\circ$, па деловите во секторскиот дијаграм ќе ги зафаќаат следните агли:
- за девојчињата $10^\circ \cdot 15 = 150^\circ$
- за момчиња $10^\circ \cdot 21 = 210^\circ$

Кружниот дијаграм ќе биде:



црт. 2

Втор начин:

Поделбата на секторите некогаш може да е полесно да се направи и преку делови изразени во дропки, па така:

- девојчињата претставуваат $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$ од кругот, а во степени тоа се $\frac{5\cdot 360^\circ}{12}=150^\circ$.
- момчињата претставуваат $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$ од кругот, што е $\frac{7\cdot 360^\circ}{12}=210^\circ$.

Истиот дијаграм ќе се добие доколку кругот го поделиме на 12 еднакви делови и ги означиме соодветно седумте делови за момчињата и петте делови за девојчињата.

Скенирај го кодот и разгледај ги дијаграмите.

Задача 1

Распределбата на вкупните парични средства на Петар за месец март е прикажана во табелата.

а) Препиши ја во тетратка и дополни ја табелата.

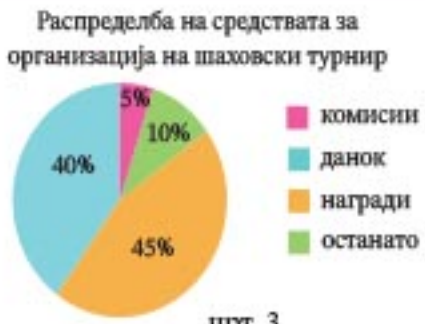
б) Нацртај секторски дијаграм за податоците од неа. Запиши ги секој од деловите на секторскиот дијаграм и во облик на дропки, како делови од кругот.

	денари	%	агол
кирија	1800		
храна	6000		
превоз	950		
останато	1000		
заштеда	250		

Задача 2

На секторскиот дијаграм, на цртеж 3, е претставена распределбата на средствата на општинско шаховско здружение за организација и спроведување на шаховски турнир.

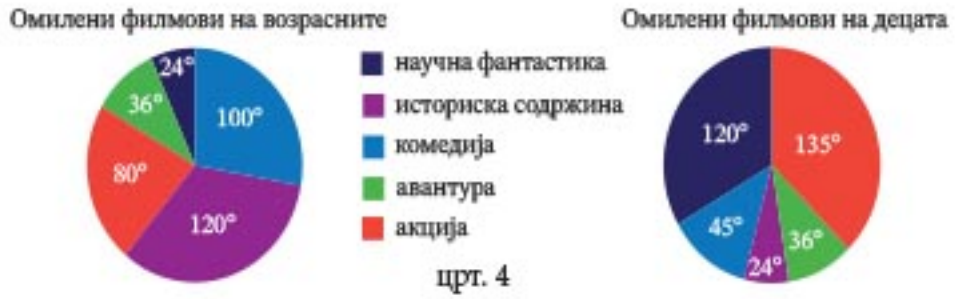
Ако вкупниот буџет, кој бил на располагање на здружението, изнесувал 60 000 денари, пресметај колку средства отпаѓаат на секоја категорија трошоци.



црт. 3

Пример 2

При едно истражување за интересот во врска со определени жанрови филмови биле испитани 90 возрасни лица и 120 деца. На цртеж 4 се дадени секторските дијаграми добиени по средувањето на податоците.



црт. 4

а) Колкав процент од децата сакаат комедија?

б) Колку возрасни лица сакаат филмови со историска содржина?

в) Колку повеќе деца од возрасни претпочитаат научна фантастика?

г) Секторот за авантуристички филмови има иста големина кај возрасните и кај децата. Објасни како без пресметување ќе знаеш дека повеќе деца од возрасни претпочитаат авантуристички филмови?

а) Секторот на деца кои сакаат комедија е со централен агол 45°, а на цел примерок одговара полниот агол 360°, од каде што за процентуалната застапеност се добива $\frac{45}{360} = 0{,}125 = 12{,}5\%$. Значи 12,5% од децата сакаат комедија.

б) Бидејќи примерокот на возрасни испитаници брои 90 лица, централниот агол кој одговара на 1 возрасно лице е $360° : 90 = 4°$, од каде аголот од 120° соодветен на делот од примерокот возрасни кои најмногу сакаат филмови со историска содржина ќе одговара на 30 лица ($120° : 4° = 30$ лица).

в) Возрасни кои сакаат да гледаат филмови со научна фантастика се $24° : 4° = 6$. Сега прво ќе го определиме централниот агол за 1 дете, $360° : 120 = 3°$, од каде бројот на деца кои сакаат научна фантастика е $120° : 3° = 40$. Тогаш $40 - 6 = 34$, односно 34 деца повеќе од возрасни сакаат научна фантастика.

г) Секторот за авантуристички филмови има иста големина кај возрасните и кај децата, но примерокот на децата е поголем во споредба со примерокот возрасни, полниот агол од 360° во првиот случај кај возрасните претставува помал број (90 возрасни), додека истиот агол од 360° одговара на поголем број деца-120. Соодветно на ова еднакви агли за авантуристичките филмови (36°) соодветствуваат на поголем број од децата отколку возрасните.

Задача 3

Табелите прикажуваат возрасна структура на жителите на два града. Нацртај секторски дијаграм за секој град и спореди ги возрасните структури на двата града. Одговори на следните прашања:

град X	%
0-14	28
15-24	21
25-54	38
55-64	7
65 и повеќе	6

град Y	%
0-14	14
15-24	12
25-54	43
55-64	12
65 и повеќе	19

Скенирај го кодот и разгледај ги задачите.

а) Колку лица имаат од 25 до 54 години во градот X?

б) Колкав процент од населението во градот Y е постаро од 55 години?

в) Ако градот X има 30 000 жители, а градот Y има 60 000 жители, како без пресметување ќе знаеш кои возрасни групи од двата града имаат иста застапеност?

Пример 3

Во табелата е дадена зависноста меѓу мерките за должина: центиметри и милиметри.

cm	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
mm	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

а) Прикажи ја зависноста на мерките за должина центиметри и милиметри со линиски дијаграм.

б) Од линискиот дијаграм прочитај 35 cm колку милиметри се.

в) Од линискиот дијаграм прочитај го бројот на милиметри во центиметри за следните вредности 200, 320 и 470.

а) За да се прикажат податоците графички на координатен систем, на x-оската се нанесуваат центиметрите, а на y-оската милиметрите (црт. 5).

б) За да се прочита од линискиот дијаграм, димензија од 35 cm во mm, на x-оската се нанесува 35 cm и од таа точка се издигнува нормала. Низ пресечната точка M на нормалата и линискиот дијаграм се повлекува права, паралелна со x-оската која во пресекот со y-оската ја дава точката која одговара на 35 cm во mm.

в) Слично како под б), но сега тргнувајќи од вредноста дадена во mm на y-оската од линискиот дијаграм може да се прочита дека на 200 (во mm) соодветствува 20 (во cm).

Од цртеж 5 можеш да воочиш дека меѓу вредностите на должината изразена во центиметри и изразена во милиметри постои правопропорционална зависност и таа може да се запише $y = 10x$, каде што y е вредноста на должината изразена во милиметри, а x е вредноста на должината изразена во центиметри.



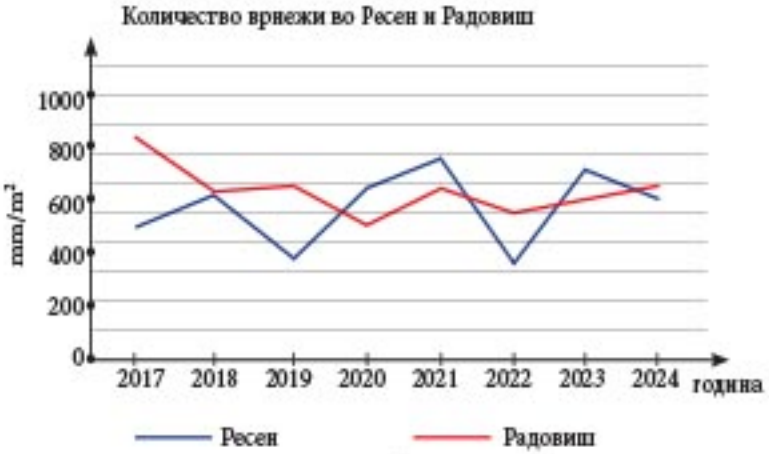
црт. 5

Скенирај го кодот и разгледај ги дијаграмите.

Задача 4

На дијаграмот на цртеж 6 е дадено количеството на врнежи во Ресен и Радовиш изразено во милиметри на метар квадратен во одредени години. Одговори:

а) Кога се забележани најмногу, а кога најмалку врнежи во секој од градовите?
б) Има ли години во кои има еднакво количество врнежи во двата града?
в) Во кој период е забележан најголем пад на врнежите во тек на една година?
г) Колкава е разликата во врнежи во 2022?



црт. 6

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Цената на половина литар кравјо и овчо кисело млеко се менувала во текот на 5 месеци согласно податоците во табелата:

	јануари	февруари	март	април	мај
кравјо кисело млеко	45	47	44	40	40
овчо кисело млеко	57	60	55	51	51

Претстави ги овие податоци во еден линиски дијаграм. Внимавај, има два различни вида кисело млеко.

2. Табелата прикажува интерес за воннаставни активности кај 100 ученици. Нацртај секторски дијаграм за да ги прикажеш овие податоци.

активност	спорт	оркестар	наука	општествено-хуманитарна
фреквенција	39	18	20	23

3. Со табелата и секторскиот дијаграм на цртеж 7 дадени се резултатите од истражувањето во врска со омилениот вкус на колачи кај 30 деца и 36 возрасни.

омилен вкус кај децата	фреквенција
овошен	5
чоколадо	11
ванила	8
лешник	6



црт. 7

а) Нацртај секторски дијаграм за податоците добиени за децата.
б) Колку возрасни сакаат чоколадни колачи?
в) Спореди ги вредностите кај децата и кај возрасните. Дали има сектори во двата кружни дијаграми кои имаат еднакви централни агли? Колкав број на единки прикажуваат тие?

4. Учениците од 2 паралелки биле прашани како го поминуваат слободното време. Првата паралелка има 20, а втората 30 ученици. Одговорите се дадени со секторските дијаграми на цртеж 8:



црт. 8

а) Пронајди кои два сектора имаат еднаков агол и објасни како е можно, иако вкупниот број ученици во двете паралелки е различен.

б) Во која паралелка има повеќе ученици кои играат игри? Дали тоа значи и поголем процент?

в) Пресметај го процентот на ученици кои практикуваат спорт во двата дијаграми. Што забележуваш?

г) Направи секторски дијаграм сметајќи дека си анкетирал вкупно 40 ученици за истото прашање каде што секторот за спорт ќе биде претставен со ист агол како во дадените два секторски дијаграми (144°). Аглите за секторите кои соодветствуваат на другите активности предложи ги по твој избор.

5. Да се прикажат со линиски дијаграм податоците за највисоката и најниската просечна месечна температура во еден град, дадени во табелата.

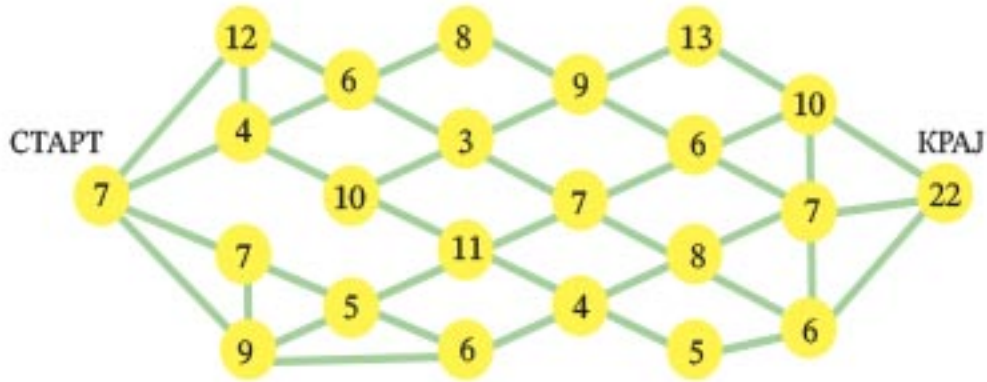
месец	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
највисока просечна температура (°C)	+4	+16	+16	+25	+27	+30	+35	+36	+25	+20	+17	+10
најниска просечна температура (°C)	−25	−20	−2	+3	+5	+13	+18	+11	+12	+5	−4	−15

Истражување

1. На интернет или во пишани публикации барај прикази на податоци со некој од изучуваните дијаграми и забележи кои прашања биле одговарани со конкретните статистички истражувања. Потоа обиди се да составиш барем уште две прашања во врска со нив.

2. Изиграј ја играта од сликата според следните правила: движи се по линиите почнувајќи од **старт** кон **крај**. Аритметичката средина на броевите на кои си застанал не треба да е помала од 5 и поголема од 10. Не можеш да застанеш повеќе од еднаш на исто поле.

Предизвик за паралелката: играта можете да ја играте на ниво на паралелка или во парови, победник е тој што прв ќе стигне до **крајот**.



5. СТЕБЛО-ЛИСТ ДИЈАГРАМ

Активност

Одреди ја медијаната за следнава група податоци:

а) 3, 5, 6, 6, 8, 10, 13, 14, 14, 14

б) 4, 1, 3, 6, 6, 1, 1, 2, 7

Собраните податоци со нумерички обележја собрани при некое истражување можеме да ги организираме со подредување според нивната големина.

Тогаш најсоодветно е да користиме дијаграм наречен **стебло-лист дијаграм** (цртеж 1).

Притоа „стеблото“ се наоѓа лево од вертикалната линија, а „листовите“ се десно од неа и секогаш се прикажани само со една цифра.

Листовите се организирани според големината, ги запишуваме во редици и внимаваме да бидат запишани еден под друг (како во вертикални линии).

Задолжително за секој стебло-лист дијаграм е задавањето на **клуч** според кој ќе се чита дијаграмот.

стебло	лист				
2	0	0	1	2	7
3	1	1	2		
4	2	3	5	6	
5	1	3	4	4	6

Клуч: 5|1 претставува 51

Пример 1

Дадено е множеството вредности кои прикажуваат време на чекање на каса во еден супермаркет изразено во минути.

17, 23, 20, 19, 25, 30, 32, 25, 12, 10, 23, 15, 11.

а) Употреби стебло-лист дијаграм за да ги прикажеш резултатите.

б) Одреди го рангот на времињата на чекање.

в) Колкав процент на купувачи чекале 20 минути и повеќе?

г) Најди ја медијаната на оваа група податоци.

а) Прв чекор: На стеблото ќе ги претставиме десетките, а листовите ќе бидат цифрите единици од секоја вредност.

1	7	9	2	0	5	1
2	3	0	5	5	3	
3	0	2				

Втор чекор: Ги подредуваме листовите по големина.

1	0	1	2	5	7	9
2	0	3	3	5	5	
3	0	2				

Клуч: 3|0 претставува 30 минути

б) Ранг = најголема вредност – најмала вредност = 32 – 10 = 22.

в) Ги броиме листовите од втора и трета редица и пресметуваме колкав процент претставуваат тие.

7 купувачи чекале најмалку 20 минути, а дадени се вкупно 13 вредности, па се добива дека $\frac{7}{13} \approx 0,54 = 54\%$ од купувачите чекале 20 минути и повеќе.

г) Бидејќи податоците се веќе подредени во стебло лист дијаграмот, со елиминирање по две вредности (една од почеток и една од крајот на стебло- лист дијаграмот) доаѓаме до вредноста која е на средина во низата, односно 20.

1	~~0~~	~~1~~	~~2~~	5	~~7~~	9
2	0	~~3~~	~~3~~	~~5~~	~~5~~	
3	~~0~~	~~2~~				

Скенирај го кодот и разгледај ги дијаграмите.

Задача 1

Јован прибрал податоци за должините на гасениците што ги нашол на екскурзија. Должините се дадени со стебло-лист дијаграмот.

а) Колку изнесува должината на најмалата гасеница, а колку на најголемата?

б) Колку гасеници нашол Јован?

в) Колку гасеници се со должина најмногу 3 cm?

г) Одреди го рангот на должините.

д) Одреди ја медијаната на должините.

1	3	5	7	7				
2	0	6	8	8	8	9		
3	1	5	5	5	5	6	8	9
4	1	5						
5	2							

клуч: 5|2 претставува 5,2 cm

Задача 2

Наставникот по англиски јазик побарал од учениците да се претстават со неколку збора. Даден е бројот на искористени зборови при претставувањето на 40 ученици.

72	81	78	82	78	89	82	77
85	76	75	81	74	87	84	77
80	83	79	82	75	74	74	71
75	79	72	76	71	75	82	78
76	76	81	77	72	84	87	83

а) Употреби стебло-лист дијаграм за да ги прикажеш податоците.
б) Направи табела на фреквенција со групирани податоци.
в) Колку од учесниците користеле повеќе од 84 зборови?
г) Колкав е процентот на учесници кои употребиле помалку од 75 зборови?
д) Најди го рангот на податоци.
ѓ) Определи ја медијаната на групата податоци.

Задача 3

Учениците од едно одделение измериле колку минути дневно поминуваат на вежбање (трчање, брзо одење или велосипед) во текот на еден ден. Добиените податоци во минути се: 32, 45, 28, 41, 39, 47, 52, 36, 44, 33, 38, 50.
а) Направи стебло-лист дијаграм за податоците.
б) Кои вредности се најчести?
в) Одреди ја медијаната.
г) Колку ученици вежбале повеќе од 40 минути?

Задача 4

Во рамките на часот по биологија, учениците од едно одделение мереле пулс во мирување. Добиените вредности се: 72, 78, 65, 81, 74, 69, 77, 83, 71, 75, 68, 79.
а) Престави ги податоците со стебло-лист дијаграм за подобро набљудување како физиолошките параметри варираат меѓу учениците.
б) Според дијаграмот, колкав е најчестиот пулс?
в) Колку е медијаната?
г) Колку ученици имале пулс 75 или поголем?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Од дадениот стебло-лист дијаграм определи:
а) најмала вредност,
б) најголема вредност,
в) колку податоци имаат вредност поголема од 90,
г) колку податоци имаат вредност најмалку 100,
д) процент на податоци помали од 75.

7	3	4	6	7	8	9	9						
8	0	0	1	1	2	3	3	5	5	6	7	8	8
9	1	1	2	4	4	5	8	9					
10	2	3	7										
11													
12	2												

клуч: 9|1 претставува 91

2. Анета ги брои зборовите во секоја од 30 реченици во дневниот весник. Нејзините резултати се прикажани со стебло-лист дијаграмот.

0	8	8	9					
1	1	2	3	4	4	8	9	
2	0	3	5	5	7	7	8	
3	2	2	3	3	6	6	8	8
4	1	2	3	3	5			

клуч 4|1 претставува 41 збор

а) Колку реченици имале по 36 збора?
б) Определи го рангот.
в) Најди ја медијаната.
г) Пресметај колку зборови просечно имаат реченициите што ги анализирала Анета.

3. Дадена е масата, во килограми, на 15 пакети.

1,1	1,7	2,0	1,0	1,1	0,5	3,3	2,0
1,5	2,6	3,5	2,1	0,7	1,2	0,6	

а) Нацртај стебло-лист дијаграм за да ги прикажеш овие информации.
б) Колку пакети имаат маса помала од 2 килограми?
в) Кој е рангот на масите?
г) Определи ја медијаната на масите на пакетите.

4. Јана ја мери висината на растенијата (во милиметри) во ботаничката градина. Ова се добиените резултати:

178	189	147	147	166
167	153	171	164	158
189	166	165	155	152
147	158	148	151	172

а) Прикажи ги резултатите со стебло-лист дијаграм.
б) Кој е рангот на висините?
в) Колку растенија се повисоки од 165 mm?
г) Најди ја медијаната на висините.
д) Определи ја модата на висините.

5. Учениците во осмо одделение изведуваат лабораториски експеримент за да го измерат времето на пад на мало метално топче од висина од 3 метри.

Секој ученик прави по едно мерење и добиени се следните резултати (во секунди):
0,78; 0,81; 0,74; 0,69; 0,72; 0,85; 0,80; 0,73; 0,77; 0,82; 0,76; 0,79; 0,75; 0,83; 0,71; 0,88; 0,84; 0,70; 0,74; 0,78.

а) Направи стебло-лист дијаграм за податоците.

б) Кој е рангот на времето?

в) Колку мерења се под 0,75 s?

г) Колкава е модата, ако постои?

6. Еден географски клуб собира податоци за дневните минимални температури во две различни области во РС Македонија во текот на ист период во јануари. Тие ги подредиле податоците и за Област А веќе направиле стебло-лист дијаграм:

Област А: Стебло-лист дијаграм (минимални температури во °C)

−5	9
−4	8 7
−3	9 5 2
−2	8 6 6 5
−1	9 4

Клуч: −3 | 5 претставува −3,5 °C

Податоци за Област Б (во °C): −1,0; −0,5; −2,0; −1,5; −3,0; −2,5; −1,0; −0,5; −0,5; −1,0; −4,2; −2,0.

а) Направи стебло-лист дијаграм за Област Б.

б) Спореди ги двата дијаграми. Што може да се заклучи за разликата во климата помеѓу областите?

в) Доколку треба да препорачаш во која област би функционирало подобро овоштарство чувствително на мраз (на пример праска или кајсија), во која област би ја сместил плантажата? Образложи ја твојата одлука врз основа на дијаграмите.

г) Предложи две истражувачки прашања што би можеле да ги објаснат разликите во минималните температури меѓу областите А и Б.

Истражување

Собери податоци за висината на учениците од твојата паралелка, поените на последниот тест, времето на трчање во минути на 400 m и слично за некои училишни активности. Претстави ги податоците со стебло-лист дијаграм и определи ги:

а) рангот, б) медијаната, в) модата, г) аритметичката средина.

Запиши кои се предностите кога користиш стебло-лист дијаграм наместо табела.

6. СТАТИСТИЧКИ ПРЕСМЕТУВАЊА ЗА ГРУПИРАНИ ПОДАТОЦИ

Активност

Температурите мерени секој ден на пладне во текот на две седмици во јануари се следните

−2, −5, −6, −4, −1, 2, 4, 5, 5, 3, −2, −3, 0, 1, 2.

Најди:

а) мода,

б) медијана,

в) аритметичка средина,

г) ранг на податоците.

Скенирај го кодот и разгледај ги статистиките

Ако се дадени групирани податоци не можеме да ја определиме модата, медијаната, и аритметичката средина. Наместо нив, можеме да најдеме модална класа, класа што ја содржи медијаната и да направиме проценка на просекот.

Пример 1

Поените на писмената работа по математика што ги добиле учениците од едно одделение се претставени со следнава табела на фреквенции со групирани податоци:

поени	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100
број на ученици	3	8	13	10	8

а) Одреди ја класата што ја содржи медијаната.

б) Одреди ја модалната класа.

в) Колку е просечниот број поени добиени на писмената работа?

а) Ги собираме фреквенциите за да го добиеме вкупниот број ученици $3 + 8 + 13 + 10 + 8 = 42$.
Медијаната треба да биде во средината меѓу 21-та и 22-та вредност.
Првите 11 вредности се од 0 до 49 поени, наредните 13 вредности се од 50 до 72 поени.
Значи 21-та и 22-та вредност се во класата 50-72, односно класа што ја содржи медијаната е 50-72.

б) Модална класа е класата со најголема фреквенција, односно 50-72.

в) Класата 0-26 содржи 3 вредности од 0 до 26, нејзината средна вредност е 13, класата 27-49 има 8 вредности, нејзината средна вредност е $(27 + 49) : 2 = 38$ итн.

поени	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100	вкупно
средна вредност на класа, m	13	38	61	80	94	
број на ученици, фреквенција f	3	8	13	10	8	42
m · f	39	304	793	800	752	2688

Проценката за вкупниот број на поени е 2688, а бројот на ученици кои ги постигнале овие поени е 42. Проценката за просечниот број поени по ученик е 2688:42=64.
Во реалноста, при статистички истражувања, најчесто се користат софтверски решенија за обработката на податоците.
Во дадениот пример можеш да се обидеш со користење на функции за автоматско пресметување на некои од вредностите во табелата, како сумата (вкупниот број на ученици, слика 1) при проценката на просекот.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		поени	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100	вкупно
3		средна вредност на класа, m	13	38	61	80	94	
4		број на ученици, фреквенција f	3	8	13	10	8	=SUM(C4:G4)
5								

слика 1

Пример 2

Лејла ги собрала бодовите што ги добил секој нејзин соученик од една игра.
Податоците во бодови се: 7, 9, 5, 6, 8, 7, 10, 6, 8, 9, 7, 5, 6.

а) Внеси ги податоците во софтвер за табеларни пресметки.
б) Направи стебло-лист дијаграм користејќи функција за сортирање.
в) Автоматски пресметај: вкупен број на ученици, просечен број на бодови, највисок и најнизок резултат.

а) На слика 2 е прикажан пример на внесени податоци во софтвер за табеларни пресметувања

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Ученик	Поени			
3		1	7			
4		2	9			
5		3	5			
6		4	6			
7		5	8			
8		6	7			
9		7	10			
10		8	6			
11		9	8			
12		10	9			
13		11	7			
14		12	5			
15		13	6			

слика 2

б)

5	5 5
6	6 6 6
7	7 7 7
8	8 8
9	9 9
10	10

Клуч: 5 | 5 ученикот има 5 бода

в) Функции за автоматска обработка:

- Вкупно ученици: =COUNTA(C3:C15) → 13
- Просек: =AVERAGE(C3:C15) → 7,23
- Највисок резултат: =MAX(C3:C15) → 10
- Најнизок резултат: =MIN(C3:C15) → 5

Пример 3

Најди го рангот на висините на ученици од едно училиште, дадени во следната табела:

висина (cm)	150-154	155-159	160-164	165-169	170-174	175-179
број на ученици	5	18	42	14	13	8

Ако податоците се веќе групирани во интервали со табели на фреквенција, тогаш рангот претставува разлика од горната граница на последниот интервал со долната граница на првиот интервал.

Рангот е 179 - 150 = 29.

Задача 1

Телесните маси на 100 луѓе се дадени во следнава табела.

телесна маса (kg)	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70 -79	80- 89	90 - 99	Вкупно
фреквенција	6	8	22	31	12	11	5	5	100

а) Најди ја модалната класа на овие маси? Што покажува модалната класа?
б) Најди ја класата што ја содржи медијаната.
в) Најди го рангот.
г) Прво направи проценка на просечната маса. Објасни ја твојата стратегија на проценување.
д) Провери ја твојата проценка со пресметување.

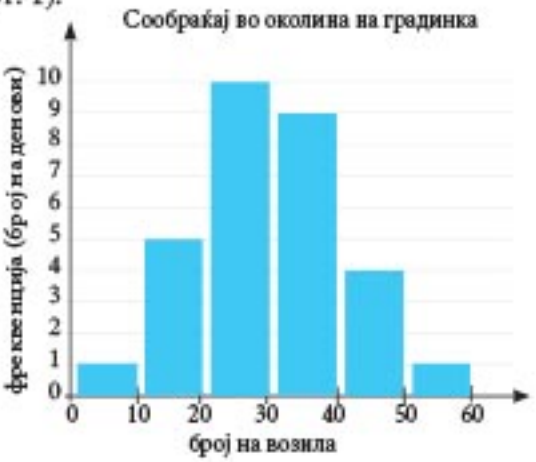
Задача 2

Најголемата маса добиена при 50 мерења изнесува 8,56 kg. Ако рангот на мерење е 1,23 kg, тогаш колку е најмалата измерена маса?

Задача 3

Менаџментот на детска градинка бил загрижен за безбедноста во врска со сообраќајот во непосредна близина на градинката. Тие направиле истражување колку возила минуваат пред градинката од 7:00 до 8:00 часот во текот на работните денови во 6 седмици. Податоците се дадени со столбестиот дијаграм (црт. 1).

а) Колку возила има најчесто во близина на градинката? Што треба да определиш за да одговориш на ова прашање?
б) Од дијаграмот најди ја класата што ја содржи медијаната и направи проценка за просечниот број возила.
в) Безбедноста е нарушена ако бројот на возила е поголем од 35. Дали околината на градинката е безбедна? Кои информации ги користиш за да одговориш на прашањето?

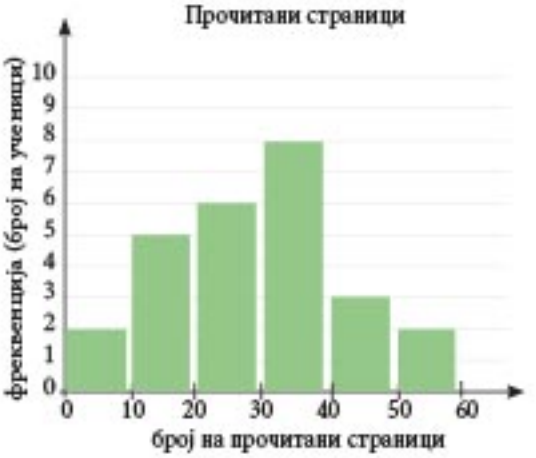


црт. 1

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Наставничката по македонски јазик ги прашувала своите ученици колку страници имаат прочитано досега од зададената лектира. Резултатите се дадени со столбестиот дијаграм (црт. 2).

а) Која е модалната класа за податоците што ги прибрала наставничката?
б) Колку ученици прочитале најмалку 40 страници?
в) Учениците требало за домашна работа да ги прочитаат најмалку првите 30 страници. Колку ученици не ја завршиле својата домашна работа?
г) Најди го рангот на податоците.



црт. 2

2. Мини-маркет забележува колку купувачи има секој ден во текот на 50 дена. Резултатите се следните:

81	82	75	83	104	92	112	124	110	92
111	105	78	87	99	86	129	115	121	76
109	75	104	96	74	104	98	114	106	109
101	110	92	86	122	118	115	117	84	71
73	116	119	122	94	81	107	109	115	127

а) Направи табела на фреквенција за групирани податоци со класи 70-79, 80-89, ..., 120-129. Доколку имаш можност табелата направи ја со помош на софтвер за табеларни пресметки.
б) Најди ја модалната класа.
в) Најди ја класата што ја содржи медијаната.
г) Изрази во проценти колку дена маркетот имал најмалку 100 купувачи.
д) Вработените во маркетот сметаат дека денот е успешен ако има најмалку 110 купувачи. Дали според добиените резултати, маркетот треба да направи промени кон подобрување на работата?

3. Истражувај колку часа дневно твоите врсници користат интернет: за учење, игри, социјални мрежи или гледање видеа. Собери податоци од најмалку 30 врсници и групирај ги во табела за фреквенција користејќи соодветен софтвер за табеларни пресметувања. Потоа обиди се да искористиш некоја од функциите на софтверот за табеларни пресметувања за да нацрташ дијаграм (избери вид на дијаграм кој сметаш дека ќе даде најдобар приказ).
а) Најди ја модалната класа.
б) Најди класа што ја содржи медијаната.
в) Направи проценка за просекот.
Напиши краток заклучок (3 до 4 реченици) во кој:
- ќе анализираш како учениците најчесто го користат интернетот (според модална класа)
- ќе ја процениш „типичната" употреба (според класата што ја содржи медијаната)
- ќе коментираш дали интернетот се користи умерено или претерано (според проценката на просекот)

Напиши препораки како учениците би можеле да го организираат времето на интернет поефикасно. Можеш да вклучиш краток предлог-план.

4. Висината на 50 ученици во cm изнесува:

145	154	161	137	137	130	128	154	139	155
168	138	161	152	160	131	156	130	141	146
162	160	163	139	148	157	149	146	146	142
146	137	127	130	128	158	139	144	140	143
130	134	125	176	128	132	138	137	143	135

а) Среди ги податоците во табела со групирани податоци. За должината на групниот интервал одлучи сам/а.
б) Најди ја модалната класа.
в) Најди ја класата што ја содржи медијаната.
г) Најди го рангот.

Истражување

1. Истражувај на интернет кои се најкористените софтвери за статистички пресметки и направи Т-табела за два од нив.
2. Размисли и одговори зошто понекогаш е соодветно користење на аритметичка средина, а друг пат мода или медијана за донесување заклучок за некоја популација? Како тоа зависи од рангот? Предложи примери каде што подобра општа слика дава медијаната, модата или аритметичката средина.

7. ЕЛЕМЕНТАРЕН НАСТАН. СПРОТИВЕН НАСТАН. ВЕРОЈАТНОСТ

Елементарен настан

Активност

1. Искажи ги сите можни исходи при експериментот „фрлање паричка само еднаш".

2. За експериментот „фрлање коцка за играње" определи кој од настаните е сигурен, а кој невозможен:

F: на горната страна на коцката се појавија од 1 до 6 точки,

G: на горната страна на коцката се појавија 7 точки?

Потсети се дека **експеримент** е активност што може да се набљудува. Секој експеримент може да се повтори под исти услови, има повеќе можни исходи и не знаеме однапред кој ќе се случи. На пример, под експеримент се подразбира фрлање монета или коцка за играње, истражување дали растенијата растат побрзо на светло или темно, па сè до сериозни лабораториски испитувања.

Различните резултати (исходи) на експериментот се нарекуваат настани. Во експериментот извлекување на карта од шпил карти за играње, настани се исходите: извлечена е осмица треф, извлечена е десетка, извлечена е карта со црвена боја и сл.

Пример 1

При експериментот „фрлање коцка за играње" разгледај ги следните настани:



A: на горната страна на коцката се појави парен број точки,
B: на горната страна на коцката се појави број на точки делив со 3,
E_1: на горната страна на коцката се појави 1 точка,
E_2: на горната страна на коцката се појавија 2 точки,
E_3: на горната страна на коцката се појавија 3 точки,
E_4: на горната страна на коцката се појавија 4 точки,
E_5: на горната страна на коцката се појавија 5 точки,
E_6: на горната страна на коцката се појавија 6 точки.

Кој од овие настани може да се „разложи" на други настани, а кој не може?

Настанот A се појавува ако се појави еден од настаните:

E_2: на горната страна на коцката се појавија 2 точки,

E_4: на горната страна на коцката се појавија 4 точки,

E_6: на горната страна на коцката се појавија 6 точки,

што значи овој настан може да биде „разложен“ на други настани кои понатаму не можат да се разложуваат.

Настанот B се појавува ако се појави еден од настаните:

E_3: на горната страна на коцката се појавија 3 точки,

E_6: на горната страна на коцката се појавија 6 точки,

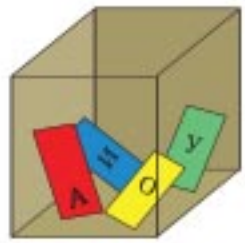
што значи дека и тој може да се разложи на други настани кои понатаму не можат да се разложуваат. За настаните кои понатаму не можат да се разложуваат на други настани велиме дека се елементарни настани. Во овој пример тоа се настаните E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6.

Елементарен настан во врска со даден експеримент е секој настан кој не може да се разложи на други настани.

При една изведба на експериментот „фрлање коцка за играње“ се појавува еден и само еден елементарен настан. Тоа значи дека при појавувањето на еден од елементарните настани не може да се појави ниту еден од останатите елементарни настани во врска со тој експеримент.

Задача 1

Запиши ги сите елементарни настани во врска со експериментот:
а) фрлање монета само еднаш,
б) извлекување на картичка од кутијата на слика 1а,
в) завртување на вртелешката на слика 1б.



слика 1а


слика 1б

Пример 2

Запиши ги сите елементарни настани во врска со експериментот „фрлање две монети само еднаш“.

Да ги означиме елементарните настани при фрлање една монета:

со Г елементарниот настан „на горната страна на монетата се појави грб“,
со П елементарниот настан „на горната страна на монетата се појави писмо“.
Бидејќи експериментот се состои од фрлање на двете монети заедно, за поголема прегледност, елементарните настани можеме да ги прикажеме со табелата:

Значи сите елементарни настани во врска со експериментот „фрлање две монети“ можеме да ги запишеме како: писмо писмо = П П; грб писмо = Г П; писмо грб = П Г; грб грб = Г Г.

Пример 3

Запиши ги сите елементарни настани при експериментот „завртување на двете вртелешки само еднаш“ дадени на слика 2.



вртелешка 1 вртелешка 2

слика 2

За да ги испишеме сите елементарни настани при експериментот завртување две вртелешки, прво се договараме дека елементарните настани за секоја од вртелешките ќе ги означиме на следниот начин:

за вртелешката со букви:

А: стрелката застанала на полето со буква А,
Б: стрелката застанала на полето со буква Б,
В: стрелката застанала на полето со буква В.

за вртелешката со броеви:

1: стрелката застанала на полето со број 1,
2: стрелката застанала на полето со број 2,
3: стрелката застанала на полето со број 3,
4: стрелката застанала на полето со број 4.

Сите елементарни настани во врска со експериментот „завртување две вртелешки“ се дадени во табелата:

		вртелешка со броеви			
		1	2	3	4
вртелешка со букви	А	А 1	А 2	А 3	А 4
	Б	Б 1	Б 2	Б 3	Б 4
	В	В 1	В 2	В 3	В 4

На пример, настанот Б 3 означува дека стрелката на едната вртелешка застанала на буквата Б, а на другата вртелешка на бројот 3.

Скенирај го кодот и разгледај ги елементарните настани при експериментот.

Задача 2

Состави табела за елементарните настани во врска со експериментот:
а) фрлање две коцки за играње,



слика 3

б) фрлање на два тетраедри со ѕидови означени со броевите 1, 2, 3 и 4 (слика 3).

Упатство: При фрлање на тетраедар исходот се определува според бројот запишан на ѕидот на кој тетраедарот лежи на површината на која го фрламе.

в) фрлање коцка за играње и тетраедар со ѕидови означени со броевите 1, 2, 3 и 4.

Спротивен настан. Веројатност

Активност

Во експериментот фрлање една монета, кој е спротивен настан на настанот А: падна писмо?

Спротивен настан на настан А е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога не се појавува настанот А.

Спротивниот настан на настанот А го означуваме со $\overline{A}$.

Пример 4

Во експериментот „фрлање коцка за играње“ определи:

а) Кој е спротивен настан на настанот А: падна број на точки помал или еднаков на 3?

б) Дали секогаш се појавува точно еден од настаните А или $\overline{A}$?

а) Во врска со експериментот „фрлање коцка за играње“, се појавува еден од елементарните настани:

E_1: на горната страна на коцката се појави 1 точка,
E_2: на горната страна на коцката се појавија 2 точки,
E_3: на горната страна на коцката се појавија 3 точки,
E_4: на горната страна на коцката се појавија 4 точки,
E_5: на горната страна на коцката се појавија 5 точки,
E_6: на горната страна на коцката се појавија 6 точки.

Настанот А: падна број на точки помал или еднаков на 3, се појавува ако се појави еден од елементарните настани: E_1, E_2 или E_3.

Спротивниот настан $\overline{A}$ се појавува ако се појави еден од елементарните настани: E_4, E_5 или E_6.

Според тоа, спротивен настан на настанот А е настанот $\overline{A}$: падна број на точки поголем од 3.

б) При секое фрлање на коцката се појавува точно еден од елементарните настани E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 или E_6, што значи дека секогаш се појавува точно еден од настаните А или $\overline{A}$.

Задача 3

Кој е спротивен на даденият настан во секој од експериментите:

а) експеримент: фрлање коцка за играње, настан А: се појави број на точки поголем од 4,

б) експеримент: извлекување едно топче од кутија во која има црни, бели и црвени топчиња, настан В: извлечено е бело топче,

в) експеримент: фрлање на две монети истовремено, настан С: на горната страна на двете монети се појави писмо,

г) експеримент: фрлање коцка за играње и фрлање монета, настан D: на коцката се појави број на точки делив со 3 и на горната страна од монетата се појави грб.

Скенирај го кодот и разгледај ги веројатностите.

Активност

За експериментот „фрлање монета само еднаш“, пресметај ја веројатноста на настанот А: на горната страна на монетата се појави писмо.

Сигурно пресмета дека веројатноста на настанот А е

$$P(A)=\frac{\text{бројот на успешните исходи}}{\text{бројот на сите исходи}}=\frac{1}{2}$$

Пример 5

Небојша фрла коцка за играње.

а) Колкава е веројатноста на настанот А: да се појават 6 точки на горната страна на коцката?

б) Колкава е веројатноста на спротивниот настан на настанот А?

а) За веројатноста на настанот А имаме $P(A)=\frac{1}{6}$ (од сите 6 страни на коцката за играње, само една од нив има 6 точки).

б) Спротивен на настанот А е настанот $\overline{A}$: не падна бројот 6. Настанот $\overline{A}$ се случува секогаш кога ќе се појават 1, 2, 3, 4 или 5 точки на горната страна на коцката, па така веројатноста

$$P(\overline{A})=\frac{5}{6}=1-\frac{1}{6}=1-P(A).$$

Пример 6

Матеа ја фрлила коцката 30 пати и набљудувала колку пати ќе се појават шест точки на горната страна на коцката. Притоа избројила дека 7 пати се појавиле шест точки на горната страна на коцката. Колкава е експерименталната веројатност за настанот „се појавиле 6 точки“, а колкава на неговиот спротивен настан (на горната страна на коцката не се појавиле 6 точки)?

Експерименталната веројатност за настанот „на горната страна на коцката се појавиле 6 точки“ при 30 фрлања е $\frac{7}{30}$, додека во тие 30 фрлања од експериментот на Матеа 23 пати не се појавиле 6 точки на горната страна на коцката. Така, веројатноста за спротивниот настан е $\frac{23}{30}=1-\frac{7}{30}$.

Ако веројатноста на некој настан е P, тогаш веројатноста на неговиот спротивен настан е $1-P$.

Пример 7

Искра во својата чанта има два билета за кино и три билети за театар. Таа извлекува еден билет од својата чанта без гледање.

а) Запиши ги спротивните настани во врска со извлекувањето на билетите од чантата на Искра.

б) Колкава е веројатноста да извлече билет за театар?

в) Колкава е веројатноста да извлече билет за кино?

г) Што е поверојатно да извлече, билет за кино или за театар?

д) Колкава е веројатноста да извлече билет за спортски натпревар од чантата?

ѓ) Кој е спротивен настан на настанот С: Искра од својата чанта извлекува билет за спортски натпревар?

а) Можни настани се:

А: Искра извлекува билет за театар, В: Искра извлекува билет за кино.

Нивните спротивни настани се:

$\overline{\text{A}}$: Искра извлекува билет за кино, $\overline{\text{B}}$: Искра извлекува билет за театар.

б) А: Искра извлекува билет за театар, па $P(\text{A})=\frac{3}{5}$.

в) В: Искра извлекува билет за кино, па $P(\text{B})=\frac{2}{5}$.

г) Поверојатно е да извлече билет за театар, бидејќи $P(\text{A})=\frac{3}{5}>\frac{2}{5}=P(\text{B})$.

д) Настанот С: извлекува билет за спортски натпревар е невозможен настан, па $P(\text{C})=0$.

ѓ) $\overline{\text{C}}$: извлекува од чантата билет што не е за спортски натпревар, односно извлекува билет за театар или кино, па $P(\overline{\text{C}})=1$.

Задача 4

Секоја буква од азбуката е напишана на картичка и картичките се ставени во кутија. Од кутијата се извлекува една картичка без гледање. Колкава е веројатноста да се избере:

а) картичка со буквата Н,

б) картичка со некоја од буквите од зборот МАТЕМАТИКА,

в) картичка со самогласка.

Кои се спротивните настани на настаните под а), б) и в)? Колку е нивната веројатност?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Запиши ги сите елементарни настани во врска со експериментот:
а) завртување на вртелешка со три дела на кои се запишани буквите А, Б, В (слика 4),
б) извлекување една картичка од пет картички на кои се запишани броеви од 1 до 5 (слика 5).
в) извлекување една картичка од картички на кои се запишани сите содржатели на бројот 5 помали од 30.



слика 4



слика 5

2. На слика 6 се дадени коцка за играње и вртелешка со означени букви на секое од четирите обоени полиња.



слика 6

а) Запиши ги сите елементарни настани во врска со експериментот завртување на вртелешката и фрлање на коцката.
б) Колкава е веројатноста на горната страна на коцката да се појавиле парен број точки, а на вртелешката буквата В?

3. Без гледање извлекуваш по една бонбона од тегла со бонбони како на слика 7.
а) Запиши го експериментот.
б) Запиши ги сите елементарни настани.
в) Колкава е веројатноста да извлечеш бонбона со жолта боја?
г) Дали настанот „извлечена е сина или зелена бонбона“, е спротивен настан на настанот „извлечена е жолта бонбона“?
Објасни го одговорот.
д) Определи ја веројатноста на спротивниот настан на настанот „извлечена е жолта бонбона“.
ѓ) Кој е спротивен настан на настанот „извлечена е бонбона која не е црвена“?


слика 7

4. Луан фрла стрелка за пикадо во мета како на слика 8.
а) Запиши го експериментот на Луан и сите елементарни настани во врска со тој експеримент. Пресметај ја веројатноста на настаните:
A: погодено е сино поле.
B: погодено е поле кое не е сино.
C: погодено е црвено поле.
D: погодено е жолто или зелено поле.


слика 8

б) Запиши го спротивниот настан на секој од настаните A, B, C, D.
Пресметај ја нивната веројатност.

в) Запиши го спротивниот настан на настанот „Луан погоди црвено поле“, а потоа пресметај ја неговата веројатност.

Истражување

Направи авион од хартија. Предвиди колку често тој правилно би слетал, при што за правилно или неправилно слетување користи ги положбите претставени на сликата.

1) правилно слетување



2) неправилно слетување



Фрли го авионот 50 пати и запиши колку пати слетал правилно. Потоа, процени колкави се шансите авионот да слета неправилно. Спореди ги твоите резултати со соучениците.

8. НАСТАНИ КОИ ЗАЕМНО СЕ ИСКЛУЧУВААТ. ЗАВИСНИ И НЕЗАВИСНИ НАСТАНИ

Настани кои заемно се исклучуваат

Активност 1

За експериментот „фрлање коцка за играње“ разгледај ги настаните:
A: на горната страна на коцката се појавија парен број точки, и
B: на горната страна на коцката се појавија три точки или пет точки.

Дали настаните A и B можат да се појават заедно (истовремено)?

За два или повеќе настани кои не можат истовремено да се појават велиме дека **заемно се исклучуваат**.

Пример 1

Определи два примери на настани кои заемно се исклучуваат при експериментот извлекување картичка од кутија со картички со броевите од 1 до 10.

Еден пример на настани кои заемно се исклучуваат во дадениот експеримент се настаните:

A: извлечена е картичка на која е запишан парен број и

B: извлечена е картичка на која е запишан непарен број.

Друг пример за настани кои заемно се исклучуваат при дадениот експеримент се:

C: извлечена е картичка на која е запишан број помал од 5,

D: извлечена е картичка на која е запишан број поголем од 7,

E: извлечена е картичка на која е запишан бројот 6.

Задача 1

Во врска со експериментот „фрлање коцка за играње“ пресметај ја веројатноста на дадените настани и утврди дали тие заемно се исклучуваат:

а) A: на горната страна на коцката се појавија парен број точки и
B: на горната страна на коцката се појавија 3 точки.

б) C: на горната страна на коцката се појави број на точки делив со 3 и
D: на горната страна на коцката се појавија прост број точки.

в) E: на горната страна на коцката се појави број на точки делив со 2 и
F: на горната страна на коцката се појави непарен број точки.

Пример 2

Од кутија што содржи 5 црвени топчиња, 2 жолти топчиња и 4 бели топчиња се извлекува едно топче.

а) Дали настаните:
A_1: извлечено е црвено топче и
A_2: извлечено е бело топче,
заемно се исклучуваат?

б) Дали настанот A: извлечено е црвено или бело топче, се појавува секогаш кога ќе се појави еден од настаните A_1 или A_2?

в) Пресметај ја веројатноста на настанот A.

а) Настаните A_1 и A_2 заемно се исклучуваат, бидејќи не можат да се појават истовремено. Всушност, во исто време не може да се извлече и црвено и бело топче.

б) Настанот A се појавува секогаш кога ќе се појави еден од настаните A_1 или A_2.

в) Веројатноста на настанот A е збир од веројатностите на настаните A_1 и A_2:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{5}{11} + \frac{4}{11} = \frac{9}{11}.$$

Пример 3

Се фрлаат истовремено зелена коцка и црвена коцка, а бројот на точки кои се појавуваат на горните страни се собираат. Најди ја веројатноста на настанот

А: збирот на точки кои се појавија на горните страни на двете коцки е помал од 4.

Разгледај ја табелата во врска со експериментот „фрлање истовремено на црвена и зелена коцка за играње“.

		зелена					
		1	2	3	4	5	6
црвена	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Настанот А ќе се појави секогаш кога ќе се појави еден од настаните:

A_1: на зелената коцка се појави 1 точка, а на црвената коцка се појави 1 точка,

A_2: на зелената коцка се појави 1 точка, а на црвената коцка се појавија 2 точки, и

A_3: на зелената коцка се појавија 2 точки, а на црвената коцка се појави 1 точка.

Настаните A_1, A_2 и A_3 заемно се исклучуваат. Веројатноста на настанот А е збир од веројатностите на A_1, A_2 и A_3:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Задача 2

Од фиока што содржи 4 црвени чорапи, 3 сини чорапи и 6 бели чорапи без гледање се извлекува еден чорап.

а) Дали настаните:

A_1: извлечен е црвен чорап и

A_2: извлечен е син чорап,

заемно се исклучуваат?

б) Дали настанот А: извлечен е црвен или син чорап, се појавува секогаш кога ќе се појави еден од настаните A_1 или A_2?

в) Пресметај ја веројатноста на настаните A_1, A_2 и А.

в) Дали веројатноста на настанот А е еднаква на збирот од веројатностите на настаните A_1 и A_2?

Задача 3

Се вртат истовремено две вртелешки како на слика 1.

Најди ја веројатноста на настанот

А: „збирот на броевите на кои застанаа стрелките на двете вртелешки е помал од 5.



вртелешка 1 вртелешка 2

слика 1

Независни и зависни настани

Активност 2

Во врска со експериментот фрлање две монети, анализирај како појавувањето на грб на едната монета влијае на појавувањето на грб или писмо на другата монета.

Два настани се **независни** ако појавувањето на едниот настан не влијае на појавувањето на другиот настан.

Пример 4

Ана пече колачи. Во исто време, нејзиниот брат Марко игра фудбал во двор.
Објасни зошто се независни настаните:
A: Ана да успее да ги испече колачите, и
B: Марко да постигне гол додека игра.

Овие два настани се независни, затоа што успехот на Ана во печење колачи не влијае на тоа дали Марко ќе постигне гол, ниту пак резултатот во играта на Марко влијае на резултатот од печењето.

Пример 5

Тони и Сара играат игра со две коцки. Тони фрла црвена коцка, а Сара фрла сина коцка. Определи дали се независни настаните:
A: на црвената коцка се појавува број на точки поголем од 4 и
B: на сината коцка се појавува парен број точки.
Објасни го одговорот.

Овие два настани се независни, затоа што резултатот на црвената коцка не влијае на резултатот на сината коцка.

Задача 4

Петар купува млеко во продавница. Во исто време, неговата сестра Елена дома гледа филм. Дали се независни настаните:
A: Петар да купи млеко, и B: Елена да го изгледа филмот до крај?
Образложи го одговорот.

Задача 5

Во кутија има 5 црвени и 6 зелени топчиња. Мерием извлекува едно топче, го враќа во кутијата, и потоа повторно извлекува топче.
Запиши два независни настани, а потоа објасни зошто се тие независни.

Два настани кои не се независни се нарекуваат **зависни настани**.
Согласно дефиницијата за независни настани, два настани се зависни ако појавувањето на едниот настан влијае на појавувањето на другиот настан.

Пример 6

Во кујната има сад со 5 бонбони од кои 3 се овошни и 2 се чоколадни. Ана извлекува една бонбона и ја јаде, а потоа веднаш извлекува уште една од истиот сад. Дали се независни настаните:

A: Ана извлекува овошна бонбона при првиот избор и

B: Ана извлекува овошна бонбона при вториот избор (по јадењето на првата).

Објасни го одговорот.

Овие два настани се зависни, затоа што појавувањето на настанот *A* директно ја менува состојбата на бонбоните во садот и влијае на појавувањето на настанот *B*.
Ако Ана прво извлече овошна бонбона (ако се појави настанот A), остануваат помалку овошни бонбони, па шансата вторпат да извади овошна се намалува.
Ако прво извлече чоколадна бонбона (ако не се појави настанот A), бројот на бонбони во садот повторно се менува, но на поинаков начин. Со тоа се менува и шансата за појавување на настанот B. Затоа настанот B зависи од настанот A, односно настаните се зависни.

Задача 6

Во кутија има 4 црвени и 3 сини моливи. Наставничката зема еден молив, не го враќа, и потоа зема уште еден.
Запиши два зависни настани, а потоа објасни зошто се тие зависни.

Задача 7

При истовремено фрлање две коцки за играње настапуваат следниве настани:

A: збирот на точките што се појавуваат на горната страна на коцките е парен број, и

B: на горната страна на двете коцки се појавуваат ист број точки.

Објасни во каков однос се настаните A и B.

Пример 7

При експериментот „истовремено фрлање монета и коцка за играње“ најди ја веројатноста на настанот

A: на монетата се појавува писмо, а на коцката се појавуваат 6 точки?

Настаните

B: на монетата се појавува писмо, и C: на коцката се појавуваат 6 точки,

се независни настани, бидејќи појавата на едниот не влијае на појавата на другиот настан. Настанот A се појавува кога се појавуваат настаните B и C истовремено.
Веројатноста на настанот A е

$$P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Задача 8

Јасмина и Леонтин шутираат на гол со топка од растојание 3 m. Од минатото искуство Јасмина погодува 2 пати на секои 3 шута, додека Леонтин погодува 4 пати од 7 шута. Ако двајцата истовремено шутираат на голот најди ја веројатноста:

а) двајцата да имаат погодок, б) двајцата да промашат,
в) Јасмина да има погодок, а Леонтин да промаши.

Пример 8

Во кутија има 4 сини и 3 жолти копчиња со иста форма и големина (слика 2). Случајно се избираат две копчиња без гледање и без враќање.
Пресметај ја веројатноста на настаните:
а) А: двете избрани копчиња се жолти и,
б) В: првото избрано копче е жолто, а второто е сино.



слика 2

а) Настаните

A_1: првото избрано копче е жолто, и A_2: второто избрано копче е жолто,

се зависни настани бидејќи копчињата не се враќаат во кутијата. Појавата на настанот A_1 го менува составот на кутијата на вкупно 6 копчиња, од кои 2 се жолти. Затоа се менува и веројатноста на настанот A_2. Веројатноста на настаните A_1 и A_2 е

$$P(A_1)=\frac{3}{7} \text{ и } P(A_2)=\frac{2}{6}.$$

Настанот А се појавува кога се појавуваат настаните A_1 и A_2 истовремено. Веројатноста на настанот А е

$$P(A)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}.$$

б) Настаните

B_1: првото избрано копче е жолто, и B_2: второто избрано копче е сино,

се зависни настани, бидејќи појавата на настанот B_1 го менува составот на кутијата на вкупно 6 копчиња. Затоа се менува и веројатноста на настанот B_2. Веројатноста на настаните B_1 и B_2 е

$$P(B_1)=\frac{3}{7} \text{ и } P(B_2)=\frac{4}{6}.$$

Настанот В се појавува кога се појавуваат настаните B_1 и B_2 истовремено. Веројатноста на настанот В е

$$P(B)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}.$$

Задача 9

Во кутија има 5 зелени бонбони и 3 жолти бонбони. Две гумени бонбони се избрани една по друга без враќање. Пресметај ја веројатноста на настаните:
а) двете избрани бонбони да се зелени,
б) прво е избрана зелена, а потоа жолта бонбона,
в) прво е избрана жолта, а потоа зелена бонбона,
г) двете избрани бонбони се жолти.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. а) Во експериментот фрлање на коцка за играње определи кои од настаните се независни, а кои зависни:
A: бројот на точки на горната страна на коцката е делив со 2,
B: бројот на точки на горната страна на коцката е делив со 3,
C: бројот на точки на горната страна на коцката е делив со 2 и со 3,
D: бројот на точки на горната страна на коцката е непарен број.
б) Кои од дадените настани под а) заемно се исклучуваат?

2. Марија и Иван играат игра со коцка и паричка. Марија ја фрла коцката и го запишува бројот што ќе падне. Ако при фрлањето на Марија падне парен број точки на коцката, Иван фрла паричка и гледа дали ќе се падне глава. Дали се зависни настаните:
A: Марија при фрлањето на коцката добива парен број, и
B: Иван при фрлањето на паричката добива глава.
Објасни го твојот одговор.

3. Еколошката секција на училиштето има 3 момчиња и 5 девојчиња. Случајно се избираат два члена за утринската еко-патрола. Во врска со настаните A и B одговори на прашањата:
Настан A: Првиот избран член е девојче
Настан B: Вториот избран член е девојче
а) Дали исходот на вториот избор зависи од тоа кој е избран за прв?
б) Дали овие два настани се зависни или независни? Објасни.

4. Во шапка се ставени картички со броевите од 1 до 20. Јанко влече две картички една по друга без враќање во шапката.
Настан A: Првиот извлечен број е парен,
Настан B: Вториот извлечен број е непарен,
Настан C: Првиот извлечен број е прост,
Настан D: Вториот извлечен број е прост.
а) Дали настаните A и B се зависни или независни? Објасни.
б) Дали настаните C и D се зависни или независни? Објасни.

5. Во тегла има 4 виолетови жетони, 3 сини жетони и 1 златен жетон. Три жетони се влечат еден по друг без враќање. Во врска со дадените настани одговори:
а) Настан A: Првиот извлечен жетон е виолетов
Настан B: Вториот извлечен жетон е виолетов

Настан C: Третиот извлечен жетон е виолетов
- Дали исходот на вториот и третиот избор зависи од првиот?
- Дали овие настани се зависни или независни? Објасни.

б) Настан D: Првиот жетон е виолетов, вториот е виолетов, третиот е златен.
- Дали исходот на секој нареден избор зависи од претходните?
- Објасни зошто овие настани се зависни.

в) Настанот E: Ниту еден од извлечените жетони не е син
- Дали ова зависи од редоследот на извлекување?

6. Вики и Јаков треба да полагаат возачки испит. Вики има 70% шанси да го положи испитот, а Јаков има 60% шанси да го положи испитот.
Најди ја веројатноста дека:
а) двајцата ќе го положат тестот,
б) барем еден од нив ќе го положи тестот.
Упатство: Претвори ги процентите во дропки.

7. Тина и Семир играат пикадо. Тие фрлаат стрелки кон иста мета.
Одговори на следните прашања во врска со настаните A и B:
A: Тина да го погоди центарот,
B: Семир да го погоди центарот ,
а) Дали настаните A и B се независни или зависни? Објасни зошто.
б) Дали настаните „Тина промашува“ и „Семир промашува“ се независни или зависни? Објасни.
в) Веројатноста дека Тина ќе го погоди центарот при играње пикадо е $\frac{1}{3}$, а веројатноста дека Семир ќе го погоди центарот е $\frac{2}{5}$. Ако двајцата истовремено погодуваат кон метата, најди ја веројатноста дека:
i) двајцата ќе го погодат центарот,
ii) двајцата ќе го промашат центарот,
iii) Тина ќе го погоди центарот, а Семир ќе промаши.

8. Во едно одделение учениците треба да изберат еден проект за училишната манифестација. Било избирано од 3 можности:

вид на проект	број на ученици што го избрале
спортски проект	8
уметнички проект	6
научен проект	6

Секој ученик избира само еден проект (не може два истовремено).
а) Колку ученици има во одделението?
б) Дали настаните „ученик избрал спортски проект“ и „ученик избрал уметнички проект“ заемно се исклучуваат? Објасни.
в) Колкава е веројатноста случајно избран ученик да избрал:
i) спортски проект, ii) уметнички проект, iii) научен проект.
в) Колкава е веројатноста ученикот да **не** избрал научен проект?

9. Проектна задача

Во период од 7 дена изработи мал проект во кој ќе ја анализираш временската прогноза и ќе пресметаш веројатности за различни настани. Притоа на крај ќе треба да подготвиш извештај според фазите на реализација на проектот:

1) Направи истражување на интернет и во извештајот од проектот накусо објасни како метеоролозите користат веројатност при професионално прогнозирање (компјутерски модели, повеќе сценарија, проценти на веројатност).
2) Собери податоци за 5–7 последователни дена за кои ќе ја преземеш временската прогноза (веројатност за дожд, ветер, температури, опис на времето). Податоците запиши ги во табела.
3) Пресметај веројатност за секој од настаните:
   - да биде сончев ден,
   - да дува ветер,
   - да има дожд и ветер,
   - да биде ден погоден за прошетка.
4) За секој од деновите во твојата прогноза пресметај ја веројатноста за настанот:
   A: Ќе носам чадор (ако има можност за дожд).
   Дефинирај го спротивниот настан B на настанот A и пресметај ја неговата веројатност.
   Провери дали важи $P(A) + P(B) = 1$?
5) За температурите на избраните денови пресметај: просек, медијана, мода, ранг и претстави ги со соодветен дијаграм.
6) Извлечи краток заклучок врз основа на следните прашања:
   - Како професионалците ги пресметуваат веројатностите за времето?
   - Колку се точни прогнозите? Зошто понекогаш грешат?
   - Како пресметаните веројатности влијаат на секојдневни одлуки (избор на облека, патување, организација на активности)?
   - Како би добиле подобрена прогноза (со повеќе модели, реални мерења или подолга временска серија на податоци)?

Истражување

Во училиштето се организира мала игра: се фрла коцка за играње и потоа се вади топче од торба во која има: 2 сини, 2 зелени и 1 црвено.

а) Објасни зошто се независни настаните:
A: да се добие парен број на коцката, и B: да се извади сино топче од торбата.

б) Објасни зошто се независни настаните:
C: да се добие број поголем од 4 на коцката, и D: да се извади црвено топче.

Учениците извлекуваат 2 топчиња едно по друго, без враќање.

в) Објасни зошто се зависни настаните:
E: Првото извлечено топче е зелено, и F: Второто извлечено топче е зелено.

г) Ако прво се извади црвено топче, размисли за настанот
G: Второто извлечено топче да биде сино.

Зошто исходот на второто извлекување зависи од првото?

Практичен дел – Експеримент:
Направете експеримент со 20 обиди: фрлајте коцка и извлекувајте топчиња според правилата.
Запишете ги исходите во табела. Дали забележаните резултати се слични на претходните заклучоци за независни и зависни настани?
Прашања за размислување:

1) Кога е полесно да се размислува за настаните – кога тие се независни или зависни настани?
2) Ако бројот на топчиња во торбата се промени (на пример 10 топчиња), како тоа ќе влијае на ситуацијата?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

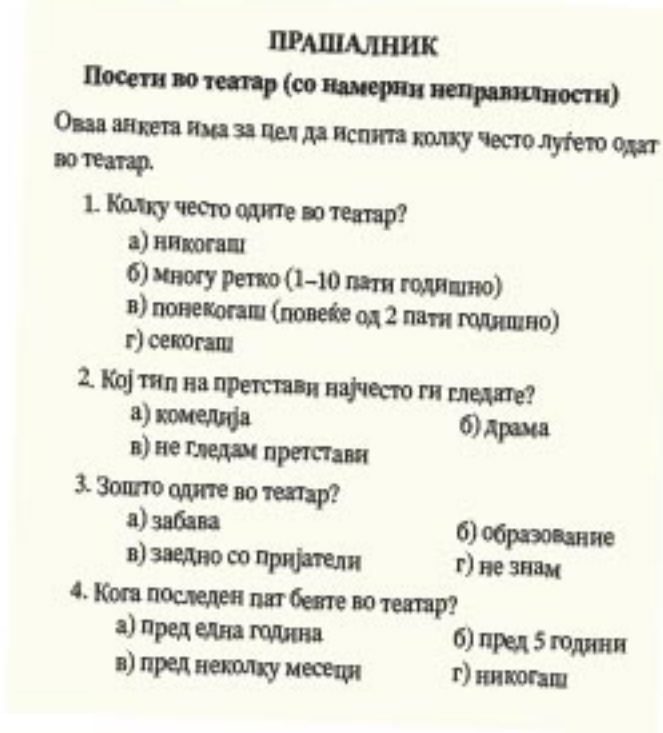
1. Определи дали е соодветно да се користи попис или примерок од популацијата при истражување на:
   а) квалитет на производство во фабрика за електронски уреди,
   б) број на чевли на детската популација во државата,
   в) број на чевли на соучениците,
   г) цена на производите во сендвичарница.
2. Во училиште кое брои 900 ученици случајно се избрани 50 кои треба да одговорат на прашањето во врска со училишните ужинки. Определи го бројот на единки во популацијата и во примерокот. Дали вака избраниот примерок е репрезентативен за популацијата?
3. Анкетна агенција е ангажирана да ги истражи намерите за гласање на жителите од одреден регион за претстојните избори. Од собраните податоци треба да се предвиди изборниот резултат во тој регион. Објасни зошто при секоја од следниве ситуации се добива несоодветен примерок:
   а) се анкетира случаен избор на луѓе во локалниот голем трговски центар помеѓу 13:00 и 15:00 часот во работен ден,
   б) се анкетираат сите членови на локалниот шаховски клуб,
   в) случаен примерок на луѓе на локалната железничка станица се анкетира помеѓу 7:00 и 9:00 часот,
   г) се спроведува анкета од врата до врата, при што се анкетира секој гласач на една одредена улица.
4. Определи дали прибраните податоци ќе бидат дискретни при следните истражувања:
   а) плоштината на секој парк во градот,
   б) брачниот статус на луѓето во населба,
   в) бројот на кибрити во кутија,
   г) постигнати поени на државното првенство во одбојка,
   д) масата на прасиња во фармите на нашата земја.

   Објасни дали е подобро да се користат примарни или секундарни податоци при секое од дадените истражувања.

5. Димитар составил инструмент за собирање податоци за да истражи колку често луѓето одат во театар. Тој изгледа вака:

Го дал прашалникот да го пополнат неколку луѓе кои ги сретнал како минуваат пред театарот.

Запиши неколку неправилности на истражувањето на Димитар и предложи нов подобрен начин за собирање на податоци.



ПРАШАЛНИК

Посети во театар (со намерни неправилности)

Оваа анкета има за цел да испита колку често луѓето одат во театар.

1. Колку често одите во театар?
   а) никогаш
   б) многу ретко (1–10 пати годишно)
   в) понекогаш (повеќе од 2 пати годишно)
   г) секогаш
2. Кој тип на претстави најчесто ги следате?
   а) комедија б) драма
   в) не гледам претстави
3. Зошто одите во театар?
   а) забава б) образование
   в) заедно со пријатели г) не знам
4. Кога последен пат бевте во театар?
   а) пред една година б) пред 5 години
   в) пред неколку месеци г) никогаш

6. Менаџментот на болницата сака да знае за возраста на пациентите хоспитализирани поради кардиоваскуларна болест во месец октомври.
Прибрани се следните податоци:

32	58	72	45	89	68	63	47	54	51
84	17	58	64	67	71	75	69	63	82
76	68	29	48	89	66	24	59	70	74
80	63	4	32	46					

а) Направи табела на фреквенција за групирани податоци со класи 0-15, 16-31, 32-47, ...

б) Најди ја модалната класа.

в) Најди ја класата што ја содржи медијаната.

г) Изрази во проценти колкава е застапеноста на пациенти од модалната класа.

д) Дали класата што ја содржи медијаната или модалната класа дава подобра општа слика за возрасната структура на пациентите? Зошто?

ѓ) Направи проценка за просечната возраст на пациентите.

7. Маркетинг агенција го забележува бројот на телефонски повици секој ден за време од 30 дена.

18	32	25	37	24	28	35	42	31	16
28	38	30	41	27	31	46	17	35	26
32	14	44	37	48	23	19	33	15	36

Претстави ги податоците со табела на фреквенција за групирани податоци во 4 групи. Најди ја модалната класа. Колкав е процентот на денови кога агенцијата примила најмалку 30 повици?

8. Четириесет фудбалери на тренинг камп биле прашани на која позиција играат. Резултатите се дадени подолу, каде Н значи напаѓач, С е играч од средината, О е одбранбен играч, а Г- голман:

Н	О	С	С	Н	С	О	Н	Г	С
С	О	Н	О	С	О	Н	С	О	Г
Н	Г	С	О	Н	О	С	О	Н	С
О	Г	С	Н	С	О	Г	С	С	Н

а) Претстави ги податоците во табела на фреквенција. Дали податоците во табелата се групирани и зошто?

б) Кое е обележјето, а која е популацијата во истражувањето?

в) Најди ја модата на податоците. Објасни што значи тоа.

г) Колку проценти од играчите биле одбранбени играчи или голмани?

д) Прикажи ги податоците со секторски дијаграм.

9. Искористи го секторскиот дијаграм од цртеж 1 за да одговориш на прашањата во врска со застапеноста на ланците од супермаркети во државата.

а) Кој ланец на супермаркети има најмногу продавници?

б) Ако бројот на супермаркети е 12582, најди колку од нив се:

1) Евтинија, 2) Сè на едно место, 3) Независни.



црт. 1

10. Од 60 патници во автобус 12 биле деца од претшколска возраст, 11 биле ученици, 22 возрасни и 15 пензионери. Во возот патувале 90 патници и тоа: 23 деца од претшколска возраст, 12 ученици, 40 возрасни и 15 пензионери. Нацртај секторски дијаграм за секое од превозните средства и спореди ги возрасните структури на патниците. Одговори на следните прашања:

а) Колку од патниците во автобусот се возрасни или пензионери?

б) Колкав процент од патниците во возот се деца или ученици?

в) Во возот и во автобусот има еднаков број на пензионери. Зошто на секторскиот дијаграм централните агли што одговараат на тие два сектори се различни?

11. Технолог го надгледува процесот на производство на масло за јадење во фабрика (црт. 2). Линискиот дијаграм го прикажува волуменот на масло собран во соодветен контејнер во текот на еден ден.



црт. 2

Три пати во текот на денот од контејнерот е извадено масло за испитување на квалитетот.

а) Колку масло е произведено во 7 часот?

б) Колку масло е извадено секој пат поради контрола на квалитетот?

в) Колкаво е вкупно произведеното количество во текот на денот?

12. За примерок од ученици во 8 одделение дадени се нивните маси со стебло-лист дијаграм:

3	2 4 8
4	0 4 4 7 9 9 9
5	0 0 1 2 2 3 3 5 6 8 8
6	0 1 2 4 4 5 7 9
7	0 2 6
8	4
9	1

Клуч. 9|1 претставува 91 kg

Најди ги: а) најголемата маса, б) најмалата маса,

в) медијаната, г) рангот на масите,

д) бројот на ученици кои имаат маса најмалку 70 килограми,

ѓ) процентот на ученици кои имаат маса помала од 48 килограми.

13. За податоците дадени со стебло-лист дијаграмот определи мода, медијана и ранг.

3	8 9
4	2 2 5
5	0 1 1 7 9
6	1 3 4
7	0

Клуч: 3|8 претставува 3,8

14. Бројот на отсутни ученици од едно училиште е забележуван за 40 дена од зимскиот период:

21	16	23	24	18	29	35	37	41	38
25	23	17	26	34	33	10	27	49	52
24	20	25	23	19	22	12	16	17	15
33	43	14	28	41	14	29	31	32	34

а) Направи стебло-лист дијаграм за податоците.

б) Најди го најголемиот и најмалиот број отсуства за зимскиот период.

в) Колкав е процентот на денови кога биле отсутни најмалку 40 ученици?

г) Присуството се нарекува „добро“ ако има помалку од 25 ученици отсутни за време на зимскиот период. Колкав е процентот кога присуството на ученици било добро?

15. Да претпоставиме дека настанот А дека утре ќе врне има веројатност $P(A) = 0{,}03$.

а) Определи го спротивниот настан В на настанот А. б) Најди P (B).

16. Запиши ги елементарните настани при експериментот:

а) случаен избор на месец од годината,
б) вртење на вртелешка на која се означени три полиња со буквите A, B и C,
в) избор на двоцифрен број помал од 20,
г) избирање на парен број од множеството содржатели на 3 помали од 30,
д) избор на вид на печиво во пекара каде се продаваат кифли со сусам, бурек и перек.

17. Маја и Каја избираат комплетно мени во ресторан. Менито содржи по избор: 3 вида готвени јадења, 4 вида пијалаци и 2 вида десерт. Запиши ги сите можности за избор што ги имаат Маја и Каја.

18. Дадени се две вртелешки како на цртеж 3. Илир и Иван играат игра така што ги вртат истовремено и запишуваат чија стрелка на која буква паднала. По 10 вртења се обидуваат да состават збор од добиените букви. Кои се елементарните настани кои можат да се појават при едно завртување на двете вртелешки истовремено?



црт. 3

19. Ерблина ги групирала броевите од 2 до 10 во две групи: прости и сложени броеви. Таа избира еден број од секоја група по случаен избор. Определи ги сите елементарни настани при експериментот на Ерблина и најди ја веројатноста дека таа ќе избере:
а) 3 и 8, б) два непарни броеви, в) два броја чиј збир е 13, г) последователни броеви.

20. На цртеж 4 е даден комплет топчиња за билјард. Ако се избира топка по случаен избор, која е веројатноста дека:
а) избрана е белата топка, б) избрана е зелена топка, в) број помал од 8?



црт. 4

21. Во градското кино се продале 20 билети за возрасни, 16 билети со попуст и 9 билети за деца. Од публиката случајно е избрана една личност. Најди ја веројатноста дека:
а) таа има билет со попуст, б) билет за возрасни, в) билет кој не е за деца.

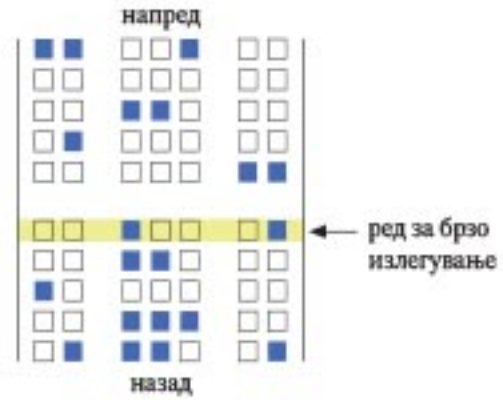
22. На цртеж 5 е дадена детска сложувалка. По случаен избор се зема едно делче. Најди ја веројатноста дека е избрано:
а) делче од некој од аглите на сложувалката (со две прави страни)
б) делче со една права страна
в) делче кое има најмалку една права страна
г) делче кое нема прави страни



црт. 5

23. На цртеж 6 е даден распоредот и слободните места во авионот со кој патуваш. Зафатените седишта се обоени со сино. Ако по случаен избор зафаќаш некое од слободните места, која е веројатноста дека:

а) ќе седиш во предната редица
б) ќе седиш во редот за брзо излегување
в) ќе седиш до прозорец
г) ќе седиш покрај патеката



црт. 6

24. Топка се вади од торбата А и се става во торбата В, а потоа од В се извлекува топка по случаен избор (црт. 7). Нека:

А: првата извлечена топка од торба А е црвена, и
В: втората извлечена топка од торба В е црвена.

а) Дали исходот на вториот избор од торба В зависи од тоа која топка е прво извадена од торба А?
б) Дали овие настани се зависни или независни?

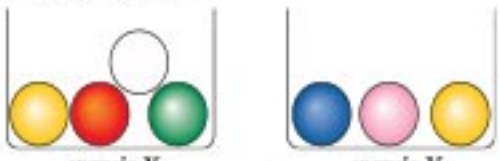


црт. 7

25. Претпостави дека случајно се извлекува топка од кутиите на цртеж 8. Нека

А: извлечена е црвена топка од кутија X, и
В: извлечена е сина топка од кутија Y.

а) Дали настаните А и В се зависни или независни? Објасни зошто.
б) Колку е веројатноста да се извлече зелена топка од кутијата X?
в) Колку е веројатноста да се извлече жолта топка од кутијата Y?
г) Ако од кутијата X се извлече бела топка и не се врати, тогаш колкава е веројатноста да се извлече секоја друга топка од кутијата X?



црт. 8

26. При експериментот фрлање на навртка 400 пати, таа паѓа 84 пати исправено, а другите пати на страна (црт. 9).

а) Најди ја експерименталната веројатност кога навртката ќе биде фрлена да падне на страна.
б) Процени ја веројатноста кога ќе бидат фрлени две навртки тие да паднат:
1) двете исправено,
2) двете на страна.



црт. 9

27. Една вртелешка има 6 еднакви полиња: 3 црвени, 2 сини и 1 жолто. Друга вртелешка има 7 еднакви полиња: 4 виолетови и 3 зелени. Двете вртелешки се вртат истовремено. Најди ја веројатноста дека при вртење ќе се добијат:

а) црвено и зелено поле, б) сино и виолетово,
в) жолто и зелено, г) црвено и виолетово.

КОРИСТЕНА ЛИТЕРАТУРА

1. Baron, Lorraine, et al. Math 8: Make Sense. Pearson, 2008.
2. Haese, Michael, et al. Grade 8 Mathematics for the International Student. 2016.
3. Pimentel, Ric, and Terry Wall. Mathematics. Hodder Education, 2013.
4. Rayner, David, Ian Bettison, Mathew Taylor. Complete Mathematics. Edited by Deborah Barton, Oxford University Press, 2023.
5. Целакоски, Наум. Дидактика на математиката. Нумерус, 1993.
6. Бакева, Верица. Веројатност. УКИМ–ФИНКИ, 2016.